Betrachtungen

über die

Kummer'sche Fläche

und

ihren Zusammenhang

mit den

hyperelliptischen Functionen $p = 2$.

Inauguraldissertation

einer hohen philosophischen Facultät

der Universität München

vorgelegt von

Karl Rohn.

MÜNCHEN

Akademische Buchdruckerei von F. Straub

1878.

Betrachtungen

über die

Kummer'sche Fläche

und

ihren Zusammenhang

mit den

hyperelliptischen Functionen $p = 2$.

Inauguraldissertation

einer hohen philosophischen Facultät

der Universität München

vorgelegt von

Karl Rohn.

MUNCHEN

Akademische Buchdruckerei von F. Straub

1878.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554608_0052

Betrachtungen über die Kummersche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Functionen $p = 2$.

Dem gegenwärtigen Standpunkte der Mathematik gemäss spielt die Untersuchung der Abelschen Functionen eine wichtige Rolle; besonders ist das allgemeine Bestreben hervorzuheben, welches den analytischen Betrachtungen geometrische Bilder zu Grunde legt. Ich erwähne hier speciell im Sinne der vorliegenden Abhandlung die Verknüpfung der elliptischen Functionen mit den ebenen Curven 3 Ord. Auch die Theorie höherer Integrale hat man auf Curven angewendet, da man aber bei dieser Theorie immer p von einander unabhängige Integrale gleichzeitig der Betrachtung unterwerfen muss, so ist es geboten, will man anders der vollen Allgemeinheit des Integralsystems gerecht werden, ein p-fach ausgedehntes Gebilde zu Grunde zu legen und hier die Verhältnisse zu interpretiren. Den hyperelliptischen Functionen, für welche die zugehörigen Theta-Functionen von 2 Argumenten abhängen, entspricht ein zweifach ausgedehntes Gebilde, eine Fläche, die beiden Parameter eines Punctes werden ersetzt durch die Argumente einer solchen Thetafunction; und zwar ist es die Kummersche Fläche, welche mit den hyperelliptischen Functionen in engem Zusammenhang steht. Den naturgemässen Ausgangspunct für die Kummersche Fläche finden wir in der Liniengeometrie, wie solches zuerst von ihrem Begründer Plücker, später besonders von Clebsch und Klein geschehen ist. An diese Untersuchungen meines verehrten

Lehrers des Herrn Prof. Klein anknüpfend werde ich im ersten Theile meiner Arbeit geometrische und gestaltliche Verhältnisse der Kummerschen Fläche näher erörtern, im Anschluss hieran wird sich dann im zweiten Theile eine Verknüpfung und Ausbreitung der hyperelliptischen Integrale auf der Fläche ergeben. Der dritte Theil endlich geht auf die von Borchardt gegebene Darstellung der Gleichung der Kummerschen Fläche durch Theta-Functionen näher ein und sucht beide Methoden in ihr richtiges gegenseitiges Verhältniss zu stellen. Dabei stellt es sich als nothwendig heraus, die quadratische Transformation zu studiren und weiter auszubilden, und es gelingt durch diese geometrischen Untersuchungen für die quadratische Transformation möglichst einfache Formeln zu geben.

§ 1. Die elliptischen Liniencoordinaten und die Parameter der Puncte der Kummerschen Fläche.

Es scheint geeignet hier in diesem Paragraphen die Hauptresultate der Liniengeometrie, wie sie a. a. O.*) entwickelt worden sind, folgen zu lassen, um den Gang der späteren Entwicklungen nicht unterbrechen zu müssen. Freilich werde ich mich darauf beschränken, diese Dinge nur zu berühren, und blos das herausgreifen was für den weiteren Verlauf als unumgänglich nöthig erscheint.

Es ist bekannt, dass man die Gleichung eines Complexes 2. Grades immer (und zwar nur auf eine Weise) so transformiren kann, dass sie die Gestalt annimmt:

$$\frac{x_1^2}{k_1} + \frac{x_2^2}{k_2} + \ldots\ldots + \frac{x_6^2}{k_6} = 0,$$

*) Klein, math. Annalen, Bd. II. und V. Klein und Lie, Monatsberichte der Berliner Academie, 1870. Ausserdem stand mir ein Manuscript über Liniengeometrie von Prof. Klein zu Gebote.

während die zwischen den Liniencoordinaten bestehende Identität sich umsetzt in

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_6^2 = 0.$$

Die 6 linearen Complexe: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots\ldots$, $x_6 = 0$ auf welche jener Complex bezogen ist, liegen gegenseitig in Involution, man nennt sie die Fundamentalcomplexe des Complexes 2. Grades. Ihm gehört als Singularitätenfläche eine gewisse Kummersche Fläche zu, welche dieselbe ist für das ganze „confocale" System:

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \ldots\ldots + \frac{x_6^2}{k_6 - \lambda} = 0.$$

Dieses System benützt man zur Darstellung der elliptischen Liniencoordinaten; setzt man nämlich für die x die Coordinaten einer beliebigen Geraden ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Identität 4 Werthe für λ; jede Gerade gehört 4 Complexen des Systems an und umgekehrt schneiden sich 4 solche Complexe in 32 zusammengehörigen Geraden, welche sich nur durch das Vorzeichen ihrer Coordinaten unterscheiden; sie sind gegeben durch:

$$\varrho\, x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots 6.$$

wo $f'(k_\alpha)$ aus $f(\lambda) = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda) \ldots\ldots (k_6 - \lambda)$ durch Differentiation nach λ unter der Annahme: $\lambda = k_\alpha$ hervorgeht.

Aus der Definition der Singularitätenfläche folgt, dass sie von jeder singulären Geraden berührt wird, also wird die hier betrachtete Kummersche Fläche berührt von den singulären Geraden des ganzen confocalen Systems, man erhält dieselben durch Gleichsetzen zweier Parameter λ. Es wird nun weiter gezeigt, dass aus dem Tangentenbüschel in irgend einem Puncte der Kummerschen Fläche jedem Complexe des confocalen Systems eine einzige Gerade als singulär zugehört, ihre beiden weiteren Durchschnittspunkte mit der Fläche sind die zugehörigen singulären Punkte. Für

die beiden Haupttangenten ist der Berührungspunkt selbst singulärer Punkt, d. h. das ganze Tangentenbüschel gehört denjenigen beiden Complexen an, welchen die Haupttangenten als singuläre Geraden angehören. Alle Tangenten eines Punktes der Fläche gehören demnach zwei Complexen an etwa: λ_1 und λ_2, sie wollen wir als die Parameter dieses Punctes bezeichnen; die beiden anderen Parameter der Tangenten sind gleich: $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$. Durchläuft λ alle Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$, so erhalten wir alle Tangenten des Büschels; für $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ kommen die Haupttangenten, dieselben besitzen also drei gleiche Paramenter; für $\lambda = k_1$, $k_2 \ldots\ldots k_6$ kommen die 6 Doppeltangenten durch jenen Punct. Auf diese Weise werden immer 32 Puncte der Kummerschen Fläche zusammengeordnet. Sind endlich die Parameter paarweise gleich etwa: $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, so sind dadurch die Geraden in den Doppelebenen resp. die Geraden durch die Knotenpuncte definirt; ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \text{Const.}$, so erhält man z. B. das Tangentenbüschel in einem Puncte des Berührungskegelschnitts einer Doppelebene, während der andere Schnittpunct einer solchen Tangente mit dem Kegelschnitt die Parameter $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$ besitzt.

Nach dem soeben Gesagten gehören jedem Puncte der Kummerschen Fläche zwei Parameter λ_1 und λ_2 zu, setzen wir einen davon constant, etwa: $\lambda_1 = \text{Const.}$, so liegen diese Puncte auf einer Haupttangentencurve; eine Haupttangente in den Punkten dieser Curve gehört immer dem Complex $\lambda = \text{Const.}$ an, und zwar ist es immer diejenige, welche diese Curve nicht berührt. Eine solche Curve berührt jeden Tangentialkegelschnitt in dem Puncte $\lambda_1 = \lambda_2 = \text{Const.}$, und besitzt in jedem Knotenpunct eine Spitze mit der Tangente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \text{Const.}$

Besonders bemerkenswerth sind die 6 Haupttangentencurven, für welche die Constante einen der Werthe: $k_1, k_2, k_3 \ldots\ldots k_6$ annimmt. Sie sind doppelt zu zählen, da die

Haupttangenten, welche den Werthen k_1, $k_2 \ldots k_6$ entsprechen, 4 zusammenfallende Puncte mit der Fläche gemein haben, und verlaufen einfach durch die Doppelpuncte, indem sie dort einen der Tangentialkegelschnitte berühren. Die Schnittpuncte einer der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven mit einer weiteren Haupttangentencurve sind für die letztere Puncte mit stationären Tangenten, und zwar giebt es $6.16 = 96$ solche Puncte für eine Curve $\lambda = \text{Const.}$; sind beide schneidende Curven ausgezeichnete Haupttangentencurven, so besitzen sie beide in ihren Schnittpuncten stationäre Tangenten, wir bezeichnen einen solchen Punct als Doppelinflexionspunct; es giebt ihrer im Ganzen: $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 8 = 120$, sie sind die Durchstosspuncte der 15 Directricenpaare mit der Kummerschen Fläche.

§ 2. Lagenbeziehungen und gestaltliche Verhältnisse der Kummerschen Fläche.*)

Die gestaltlichen Verhältnisse einer ebenen Curve 4. Ord. kann man bekanntlich auf die verschiedenen Lagen eines Kegelschnittes zu einem Vierseit zurückführen, indem man durch geringe Constantenänderung aus dem doppelt zählenden Kegelschnitt eine Curve 4. Ord. erhält, welche jene 4 Geraden zu Doppeltangenten hat. Der Grund dafür, dass man alle Gestalten auf diese Weise erhalten kann liegt darin, dass es immer vier reelle Doppeltangenten giebt und ebenso immer reelle vierfach berührende Kegelschnittsysteme. Im vorliegenden Falle, bei der gestaltlichen Untersuchung der Kummerschen Fläche, wird es ganz ebenso gelingen, diese Fläche zu entwickeln aus einer doppelt zählenden Fläche 2. Grades und einem Tetraëder, dessen Seiten Tangentialebenen der F_2 sind. Ich muss hier zunächst zeigen, welche Fläche 2. Grades und welches Tetraëder

*) Siehe hierzu die von mir gefertigten 3 Modelle der Kummerschen Fläche.

es ist, die diese Rolle übernehmen. Da hier nur reelle Flächen untersucht werden sollen, so können wir die 6 Fundamentalcomplexe als reell oder conjugirt imaginär voraussetzen und haben demnach im ganzen 4 Fälle zu unterscheiden:

1) alle 6 Complexe sind reell,
2) 4 Complexe sind reell und ein Paar conjugirt imaginär,
3) 2 Complexe sind reell und 2 Paare conjugirt imaginär,
4) 3 Paare sind conjugirt imaginär.

Im ersten Falle existiren 9 Paar reelle Directricen, 9 reelle Hyperboloide.

Im zweiten Falle existiren 5 Paar reelle Directricen, 4 reelle Hyperboloide.

Im dritten Falle sind nur 3 Paar Directricen reell und 2 Hyperboloide.

Im letzten Falle sind ebenfalls 3 Paar Directricen reell und 4 nicht geradlinige Flächen 2. Ord.

Der Uebergang von einer doppelt zählenden Fläche 2. Ord. zu der Kummerschen Fläche ist nun folgender. Wenn die 6 Fundamentalcomplexe gegeben vorliegen, so gehören ihnen noch dreifach unendlich viele Kummersche Flächen zu, da es dann noch dreifach unendlich viele confocale Complexsysteme gibt, dem entsprechend dass man jenen Fundamentalcomplexen noch ganz beliebige Parameter zuertheilen kann. Man sieht das auch so ein, dass man noch einen beliebigen Raumpunct als Knotenpunct der Fläche annehmen kann, damit sind dann alle 16 Knotenpuncte und alle 16 Doppelebenen und also auch die Kummersche Fläche bestimmt. Rückt nun der bewegliche Knotenpunct auf eine der reellen Linienflächen, welche 3 Complexen gemeinsam sind, so thun dies auch die übrigen, sie liegen alsdann auf 4 Erzeugenden der einen und 4 der anderen Art. Sind diese Erzeugenden alle reell, so bestimmen sie 16 reelle Puncte und eben so viel reelle Ebenen, die 16

Kegelschnitte bestehen aus Geradenpaaren. Wir haben dann den ersten Fall vor uns; die 8 Erzeugenden (von jeder Art 4) theilen das ganze Hyperboloid in 16 Theile, 8 solche Stücke stossen immer über Ecken zusammen, sie denken wir uns doppelt überdeckt und erhalten so ein naturgetreues Bild der Kummerschen Fläche deren Knotenpuncte gerade im Begriff sind auf das Hyperboloid zu rücken; bewegen sich die Knotenpuncte weiter von demselben weg, so werden sich die einzelnen Flächentheile aufblasen, gleichzeitig gehen die Geradenpaare in wirkliche Kegelschnitte über. Man übersieht dabei sofort, dass der Schnittpunct eines solchen Geradenpaares, welcher ja ebenfalls einen Knotenpunct vorstellt, nur im Grenzfalle auf die betr. Doppelebene rückt. Die nebenstehende Figur gibt ein schematisches

Bild einer Kummerschen Fläche, bei der alle Knotenpuncte und also auch alle Doppelebenen reell sind; die Erzeugenden des Hyperboloids sind dabei parallel angenommen. Die wechselseitigen Lagenverhältnisse der Knotenpuncte und Doppelebenen sind durch folgende Tabelle gegeben, worin die letzteren durch römische die ersteren durch arabische Ziffern bezeichnet sind.*)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
2	1	1	6	6	14	1	9	5	14	2	2	2	1	1	1
16	11	2	7	7	7	2	11	15	6	16	11	11	16	16	11
15	12	10	8	4	4	3	16	12	9	4	9	12	15	5	8
14	13	9	11	15	5	4	4	8	8	8	5	14	13	9	4
7	3	8	16	12	10	5	3	3	3	12	15	6	10	12	15
3	7	7	5	9	13	6	10	10	13	13	13	10	6	14	14

*) Vergleiche die Kummersche Tabelle, welche jedoch nach einem anderen Prinzipe gebildet ist.

Vertauscht man die römischen und arabischen Ziffern, so gibt die Tabelle die Ebenen, welche durch einen Punct gehen.

Dies ist die Anordnung der ganzen Fläche und wir können zur speciellen Betrachtung eines Flächentheils übergehen. Diese einzelnen Theile haben die Gestalt eines Tetraëders, nur verlaufen an Stelle der Kanten von einem Eckpunct zum andern 2 Kegelschnittstücke, welche sich ihre concaven Seiten zukehren und dadurch ein hyperbolisches Segment begrenzen. Es gibt also 6 hyperbolische Segmente (Zweiecke) den Kanten eines Tetraëders entsprechend und 4 elliptische Segmente (Dreiecke) entsprechend seinen Seitenflächen.

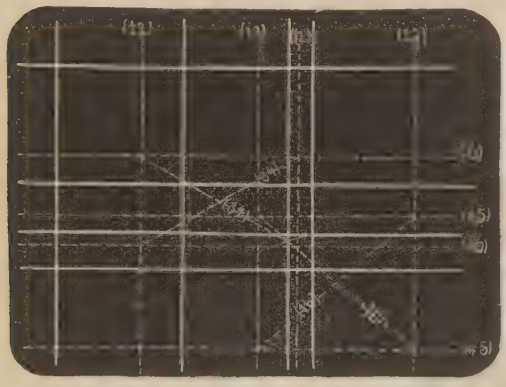
Wir können weiter die Lage der reellen Directricenpaare und damit zugleich die Lage der reellen Hyperboloide angeben. Solche Directricenpaare müssen die Eigenschaft haben, die 16 Knotenpuncte in einander überzuführen, je 2 zugeordnete Puncte müssen durch dieselben harmonisch getrennt werden. Daraus folgt dass auf einem Hyperboloide 4 reelle Directricenpaare liegen, zu jeder Erzeugung gehören 2; die Verbindungslinien der Schnittpuncte zweier Paare bilden 4 weitere Paare; diese 4 Paare endlich werden von dem noch fehlenden reellen Paare geschnitten. Es liegt diese ganze Vertheilung darin begründet, dass 3 Directricenpaare (hi), (kl), (mn), welche alle 6 Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 umfassen ein Tetraëder bilden, und dass sich überhaupt 2 Paare, welche keinen Index gemein haben, schneiden. Um eine ganz bestimmte Vorstellung zu entwickeln, knüpfe ich an die 6 Fundamentalcomplexe an, und nehme an dass die 3 Complexe (1), (3), (5) rechts, die anderen drei (2), (4), (6) dagegen links gewunden seien, d. h. dass die einen eine positive die andern eine negative Invariante besitzen. (Von den reellen Complexen eines involutorischen Systems muss immer die eine Hälfte rechts die andere

links gewunden sein). Dann sind folgende 9 Directricenpaare reell:

(12), (34), (56),
(14), (36), (52),
(16), (32), (54),

sie bilden 3 reelle Tetraëder, welche keine Kanten gemein haben.

Ferner wähle ich ein Hyperboloid aus (sie sind alle reell bis auf (135) resp. (246)) nämlich (123) resp. (456), dann ergibt sich folgendes Bild:



Die beiden Tetraëder: (12), (34), (56) und (16), (32), (54) haben ihre Eckpuncte auf dem Hyperboloid, das dritte: (14), (36), (52) ist Polartetraëder in Bezug auf das Hyperboloid, seine Kantenpaare (14), (36), (52) schneiden je ein Kantenpaar der beiden ersten Tetraëder, und zwar die Paare: (23), (56) resp. (12), (45) resp. (34), (16).

Wir sehen daraus, wenn wir von dieser speciellen Kummerschen Fläche zur allgemeinen übergehen, dass alsdann die reellen Directricenpaare sich immer so zu 3 Tetraëdern zusammenstellen lassen, dass 2 dieser Tetraëder ihre Eckpunkte im Innern von je 4 Flächentheilen liegen haben, die in keinem Knotenpuncte an einander stossen.

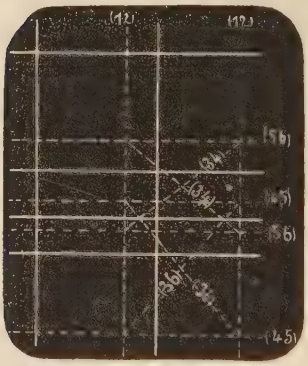
Die Kanten dieser Tetraëder schneiden die Fläche in je 4 Puncten, während die Kanten des dritten Tetraëders dieselbe gar nicht treffen. Jene 4.12 Schnittpuncte, sind die reellen Doppelinflexionspuncte der Fläche, die Verbind-

ungslinien zweier Inflexionspuncte, welche auf einem Flächentheile einander gegenüberliegen, ergeben eben die Tetraëderkanten.

Ich will hier noch bemerken, dass sich der Durchschnitt eines Hyperboloids mit der Fläche leicht angeben lässt, er besteht aus 8 Ovalen, welche 16 reelle Doppeltangenten besitzen, jeder Erzeugung gehören 8 an.

Alle diese Bemerkungen bezogen sich auf den Fall 1, wir wollen jetzt zu den 3 weiteren Fällen übergehen.

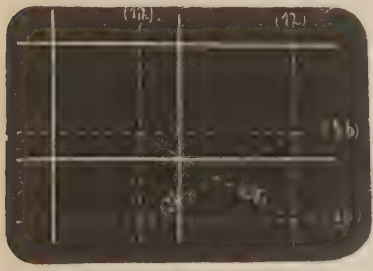
Lassen wir 2 Erzeugende des Hyperboloids mit den Knotenpuncten 1, 16, 15, 14 resp. 2, 11, 12, 13 zusammenfallen, so erhalten wir eine Plücker'sche Complexfläche lassen wir sie weiter conjugirt imaginär werden, so gelangen wir zur Repräsentation des 2. Falles. Hier gibt es nur noch 8 reelle Doppelebenen und ebensoviele Knotenpuncte; die Fläche besteht nur noch aus 4 Theilen*). Von den Congruenzen sind nur noch 5 reell: (12), (34), (36), (54) und (56). Das Directricenpaar (12) ist jetzt vor den übrigen 4 ausgezeichnet, da die zugehörige Congruenz den conjugirt imaginären Complexen (1) und (2) angehört. Während nämlich die Abänderung bei den Directricen (34), (36), (54), (56) einfach darin besteht, dass sie nur



*) Der Tangentialkegel an eine Kummersche Fläche ist der allgemeine Kegel 4. Classe und die Durchschnittscurve die allgemeine Curve 4. Ord., aber es ist in den vorliegenden Fällen nicht möglich eine Curve mit beliebig vielen Ovalen zu erzeugen, es ergeben sich für den ersten Fall Curven mit 4 oder 3 Ovalen, für den 2. Fall mit 3 oder 2, für den 3. Fall mit 2 oder 1, für den 4. Fall mit 1 oder 0 oder auch mit 2 ineinander liegenden Ovalen. Der Grund liegt darin, dass bei einer

noch 2 hyperbolische Segmente treffen, also nur noch je 2 Doppelinflexionspuncte (im Ganzen 16) ausschneiden, so besteht sie bei den beiden ausgezeichneten Directricen (12) darin, dass sie zwar noch in je 4 reellen Puncten schneiden, diese Puncte jetzt aber auf den elliptischen Segmenten liegen, da ja die vierfach berührenden Haupttangenten in einem solchen Puncte die Parameter k_1, k_2 besitzen, welche conjugirt imaginäre sind. So kommt es auch dass die einzelnen Flächentheile nur noch 4 hyperbolische Segmente (Zweiecke) und zwei elliptische Segmente (Vierecke) aufweisen.

Wird weiter auch ein Paar der anderen Erzeugung des Hyperboloids conjugirt imaginär, so dass etwa nur noch die Complexe (3) und (4) reell sind, so kommen wir zum 3. Fall. Es sind nur noch 4 Knotenpuncte und 4 Doppelebenen reell, die Fläche besteht nur mehr aus 2 Theilen. 3 Paar Directricen sind reell (12), (34), (56), sie bilden ein reelles Tetraëder, (12) und (56) schneiden jetzt je 2 singuläre Puncte auf den elliptischen Segmenten aus, indess die eine Gerade des Paares (34) durch die 4 Doppelinflexionspuncte geht, während die andere ganz frei verläuft. Die einzelnen Flächentheile sind aus einem elliptischen und 2 hyperbolischen Segmenten zusammengesetzt.



Den vierten Fall leitet man aus einem Ellipsoide ab, indem man 4 Puncte als Knotenpuncte nimmt; das ganze doppelt überdeckte Ellipsoid, dessen Blätter in den 4 Punc-

---

C4 immer 4 reelle Doppeltangenten erster Art existiren, in unserem ersten Falle aber 16 oder 28 Doppeltangenten reell sind, im 2. Falle 8 oder 16, im dritten Falle 4 oder 8, und im letzten Falle immer 4, da ja 6 oder 4 oder 2 oder 0 Congruenzen 2. Ordnung und 2. Classe, gebildet von der singulären Geraden der Fundamentalcomplexe, reell sind.

ten sich durchsetzen, stellt dann die Kummersche Fläche dar; die 4 Doppelebenen sind die Tangentialebenen in jenen 4 Puncten, der in ihnen liegende Kegelschnitt besteht aus dem Berührungspuncte. Um von dieser schematischen Gestalt zu einer allgemeinen Fläche zu gelangen, lässt man die Knotenpuncte in's Innere des Ellipsoid's rücken, ihre Polarebenen, welche die Doppelebenen darstellen, rücken vom Ellipsoide weg und die auf ihnen gelegenen Puncte gehen in Berührungsellipsen über. Die trichterförmigen Stücke der Fläche, welche sich von diesen Ellipsen nach den zugehörigen Knotenpuncten erstrecken, bilden die 4 hyperbolischen Segmente, sie können keine Inflexionspuncte mehr besitzen. Von den Directricen sind 3 Paare (12), (34), (56) reell, sie bilden ein reelles Tetraëder und zwar ein Polartetraëder des Ellipsoids; die eine Gerade eines solchen Paares schneidet also die Fläche in 4 reellen singulären Puncten, jedes elliptische Segment in 2, die andere dagegen schneidet gar nicht in reellen Puncten. In den 3 ersten Fällen wurden beim Durchgang durch ein Hyperboloid die bedeckten und unbedeckten Felder vertauscht in dem 4. Falle, wo die ganze Fläche 2. Gr. doppelt überdeckt ist, gelangt man durch einen solchen Durchgang zu einer Fläche, welche nur noch 4 reelle Knotenpuncte und 4 Doppelebenen besitzt, sonst aber ganz imaginär ist. Wir sehen daraus gleichzeitig, dass die 4 Knotenpuncte bei einer reellen Fläche innerhalb der 4 reellen F_2 liegt und dass diese entweder 4 Ellipsoide oder 4 zweischalige Hyperboloide bilden.

An diese Betrachtungen schliessen sich auch die gestaltlichen Verhältnisse der Haupttangentencurven an. Zunächst auf einem hyperbolischen Segmente ist die Ueberdeckung leicht anzugeben. In den ersten 3 Fällen haben wir es mit Zweiecken zu thun, auf denselben verlaufen 2 aus-

gezeichnete Curven, deren Tangenten in den Knotenpuncten zusammenfallen mit den Tangenten der Kegelschnitte; die anderen Curven lassen sich leicht einzeichnen durch die Bemerkung, dass sie in den Schnittpuncten mit jenen beiden ausgezeichneten Curven Wendungen besitzen. Man sieht in der Figur*) sehr schön dass die ausgezeichneten Curven dem System doppelt zählend angehören. Im 4. Falle giebt es keine ausgezeichneten Haupttangentencurven mehr, da die Fundamentalcomplexe alle imaginär sind, die Curven dürfen also keine Wendung mehr besitzen, und zeigen nur noch eine Spitze in dem einen Knotenpuncte. Sie gehen alle aus einer Curve hervor durch Drehung von 0^0 bis 360^0.

In dem letzten Falle ist auch unmittelbar die Vertheilung auf der ganzen Fläche evident, es gehören immer 4 Züge zusammen, auf jedem hyperbolischen Segmente liegt einer; zwei vollständige Curven schneiden sich in 8 reellen Puncten. In den drei ersten Fällen ist durch den Verlauf der ausgezeichneten Curven, die Lage der übrigen leicht zu übersehen. Im ersten Falle besteht jede der 6 ausgezeichneten Curven aus 4 einzelnen Zügen, z. B. die Curve k_1 aus:

VII 1, III 2, XIII 10, XIV 6; II 3, X 13, VI 14, I 7;
XVI 4, XI 8, IX 12, V 15; XV 5, IV 16, VIII 11, XII 9.

*) Klein und Lie, Monatsberichte der Berliner Academie 1870.

Ebenso besteht k_2 aus 4 Zügen, beide Curven schneiden sich in den 8 Durchstosspuncten der Directricen (12), alle Hauptangentencurven deren Parameter zwischen k_1 und k_2 liegen, verlaufen auf denselben 8 Segmenten.

Im zweiten Falle existiren 4 ausgezeichnete Curven, sie bestehen aus zwei Zügen, auf jedem liegen vier Knotenpuncte.

Im dritten Falle sind nur noch 2 ausgezeichnete Curven vorhanden, sie bestehen auch aus 2 Zügen, welche jedoch nur je 2 Knotenpuncte durchlaufen.

II. Theil.

§ 1. Beziehung der hyperelliptischen Functionen zu der Kummerschen Fläche.

Wir hatten im vorigen Theile den Haupttangentencurven eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet, wir hatten dort gefunden, dass jede auf 8 hyperbolischen Flächenstücken verläuft und dass sich 2 solche Curven, die auf den gleichen Flächentheilen liegen, in 32 reellen Puncten durchsetzen. Diesen 32 Puncten haben wir dieselben beiden Parameter zugetheilt, nämlich die Parameter der zugehörigen Haupttangenten, oder was dasselbe ist, der durch sie hindurch gehenden Haupttangentencurven. Es kommt nun darauf an mit Hilfe der hyperelliptischen Functionen diese 32 Puncte zu trennen, ihnen verschiedene Parameter beizulegen. Zu diesem Zweck gehen wir von den Coordinaten der beiden Haupttangenten eines Punctes der Kummerschen Fläche aus; sie mögen bestimmt sein durch die Werthe:

$$\varrho\, x_i = \frac{\sqrt{(k_i - \lambda_1)^3 (k_i - \lambda_2)}}{\sqrt{f'(k_i)}};$$

$$\text{und: } \varrho\, x_i' = \frac{\sqrt{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)^3}}{\sqrt{f'(k_i)}}; \quad i = 1, 2, \ldots 6.$$

wobei die Wurzeln der entsprechenden x und x′ immer mit demselben Vorzeichen zu nehmen sind. Dann ist:

$$\sigma\ x_i\ x_i' = \left[\sqrt{\frac{(k_i-\lambda_1)\ (k_i-\lambda_2)}{f'\ (k_i)}}\right]^4.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich leicht durch ϑ-Functionen ersetzen. Bezeichnen wir nämlich:

$(k_1-\lambda)\ (k_2-\lambda)\ (k_3-\lambda)\ (k_4-\lambda)\ (k_5-\lambda)\ (k_6-\lambda) = A$,

und sind:

$$v_1 = \int_\alpha^{\lambda_1} \frac{(m+n\lambda)\ d\lambda}{\sqrt{A}} - \int_\alpha^{\lambda_2} \frac{(m+n\lambda)\ d\lambda}{\sqrt{A}};$$

$$v_2 = \int_\beta^{\lambda_1} \frac{(m'+n'\lambda)\ d\lambda}{\sqrt{A}} - \int_\beta^{\lambda_2} \frac{(m'+n'\lambda)\ d\lambda}{\sqrt{A}};$$

die normirten Integrale, welche an den Querschnitten folgende Perioden besitzen:

	a_1	a_2	b_1	b_2
v_1	πi	0	a_{11}	a_{12}
v_2	0	πi	a_{12}	a_{22}

dann ist:*)

$$\frac{\vartheta\binom{11}{01}\ (v_1 \mid v_2)}{\vartheta\binom{10}{11}\ (v_1 \mid v_2)} = c_1 \sqrt{\frac{(k_1-\lambda_1)\ (k_1-\lambda_2)}{(k_6-\lambda_1)\ (k_6-\lambda_2)}};$$

*) Vergleiche: Prym, neue Theorie der ultraëlliptischen Functionen, Wien 1864. Die Bezeichnung der Theta-Functionen ist von dort herübergenommen.

$$\frac{\vartheta\binom{01}{01}(v_1 \mid v_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(v_1 \mid v_2)} = c_2 \sqrt{\frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}{(k_6-\lambda_1)(k_6-\lambda_2)}};$$

$$\frac{\vartheta\binom{01}{11}(v_1 \mid v_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(v_1 \mid v_2)} = c_3 \sqrt{\frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)}{(k_6-\lambda_1)(k_6-\lambda_2)}};$$

$$\frac{\vartheta\binom{11}{10}(v_1 \mid v_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(v_1 \mid v_2)} = c_4 \sqrt{\frac{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)}{(k_6-\lambda_1)(k_6-\lambda_2)}};$$

$$\frac{\vartheta\binom{10}{10}(v_1 \mid v_2)}{\vartheta\binom{10}{11}(v_1 \mid v_2)} = c_5 \sqrt{\frac{(k_5-\lambda_1)(k_5-\lambda_2)}{(k_6-\lambda_1)(k_6-\lambda_2)}}.$$

Um die Constanten zu bestimmen, setzt man für λ_1 und λ_2 specielle Werthe ein; so erhält man aus der ersten dieser 5 Gleichungen c_1, indem man einmal:

$$\lambda_1 = k_2,\ \lambda_2 = k_3;$$

das andere Mal:

$$\lambda_1 = k_4,\ \lambda_2 = k_5$$

nimmt.

Es folgt dann:

$$c_1 \sqrt{\frac{(k_1-k_2)(k_1-k_3)}{(k_6-k_2)(k_6-k_3)}} = \frac{\vartheta\binom{11}{01}(-\frac{\pi i}{2} \mid 0)}{\vartheta\binom{10}{11}(-\frac{\pi i}{2} \mid 0)} =$$

$$\frac{\vartheta\left(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2} \mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{a_{11}}{2} \mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}\right).e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}}};$$

und:

$$c_1 \sqrt{\frac{(k_1-k_4)(k_1-k_5)}{(k_6-k_4)(k_6-k_5)}} = \frac{\vartheta\binom{11}{01}\left(\frac{a_{12}}{2} \mid \frac{a_{22}}{2}\right)}{\vartheta\binom{10}{11}\left(\frac{a_{12}}{2} \mid \frac{a_{22}}{2}\right)} =$$

$$-\frac{\vartheta\left(\frac{a_{11}}{2} \mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}\right).e^{-\frac{a_{12}}{2}-\frac{a_{22}}{4}}}{\vartheta\left(-\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{12}}{2} \mid -\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{12}}{2}+\frac{a_{22}}{2}\right)};$$

also:

$$c_1^2 = -\sqrt{\frac{(k_6-k_2)}{(k_1-k_2)}\frac{(k_6-k_3)}{(k_1-k_3)}\frac{(k_6-k_4)}{(k_1-k_4)}\frac{(k_6-k_5)}{(k_1-k_5)}};$$

oder:

$$c_1^4 = -\frac{f'(k_6)}{f'(k_1)}.$$

Das oben erwähnte Product nimmt demnach den einfachen Werth an:

$$\varrho\, x_1 . x'_1 = -\vartheta^4 \binom{11}{01} (v_1 \mid v_2);$$

und ganz ebenso:

$$\begin{aligned}
\varrho\, x_2 . x'_2 &= +\vartheta^4 \binom{01}{01} (v_1 \mid v_2);\\
\varrho\, x_3 . x'_3 &= -\vartheta^4 \binom{01}{11} (v_1 \mid v)_2;\\
\varrho\, x_4 . x'_4 &= +\vartheta^4 \binom{11}{10} (v_1 \mid v_2);\\
\varrho\, x_5 . x'_5 &= -\vartheta^4 \binom{10}{10} (v_1 \mid v_2);\\
\varrho\, x_6 . x'_6 &= +\vartheta^4 \binom{10}{11} (v_1 \mid v_2).
\end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass jedem Werthepaar λ_1, λ_2 eindeutig ein Werthepaar v_1, v_2 entspricht, abgesehen von Vielfachen der Perioden; umgekehrt lässt sich die Congruenz:

$$v_1 \mid v_2 \equiv \int_\alpha^{\lambda_1} dv_1 - \int_\alpha^{\lambda_2} dv_1 \;\Big|\; \int_\beta^{\lambda_1} dv_2 - \int_\beta^{\lambda_2} dv_2,$$

nur auf eine Weise befriedigen; wir können also an Stelle der früheren Parameter λ_1, λ_2 die neuen v_1, v_2 einführen. Lässt man eine Grenze constant, so bewegt man sich auf einer Haupttangentencurve; nimmt man einen der 6 Verzweigungswerthe als eine Grenze, so erhält man Punkte der entsprechenden ausgezeichneten Haupttangencurve; sind beide Grenzen Verzweigungspunkte, so hat man einen Doppelinflexionspunkt vor sich. Unsere nächste Aufgabe wird es nun sein, die 32 zusammengehörigen Punkte λ_1, λ_2 von einander zu trennen. Gehen wir zu den Coordinaten-

werthen der Haupttangenten eines Punktes der Kummer'schen Fläche zurück und schreiben sie in der Form:

$$\varrho\, x_i = \frac{k_i - \lambda_2}{\sqrt{f'(k_i)}} \cdot \sqrt{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)},$$

und

$$\varrho\, x_i' = \frac{k_i - \lambda_2}{\sqrt{f'(k_i)}} \cdot \sqrt{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)},$$

wo die Grösse: $\sqrt{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)}$ in beiden Ausdrücken mit demselben Vorzeichen zu nehmen ist, so sehen wir, dass sich die wesentliche Irrationalität, abgesehen von einem constanten Factor gerade durch eine der 6 ungeraden Thetafunctionen ersetzen lässt. Fügen wir den Argumenten dieser ungeraden ϑ-Functionen irgend eine der 15 Perioden-Combinationen zu, so werden jedesmal 2 Functionen ihr Vorzeichen ändern und folglich auch 2 Coordinaten x und x'. Gleiches geschieht, wenn man von einem Haupttangentenpaare ausgeht und auf dasselbe eine der 15 Transformationen anwendet, welche durch die 15 Congruenzen definirt sind, oder wie man sich kürzer ausdrücken kann, wenn man ein Haupttangentenpaar an einer der 15 Congruenzen spiegelt. Die Sache verhält sich des Näheren so. Für die 6 ungeraden ϑ-Functionen gelten die folgenden Gleichungen:

$$\vartheta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \end{pmatrix} (v_1 \mid v_2) = - \vartheta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \end{pmatrix} (-v_1 \mid -v_2);$$

$$\vartheta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \end{pmatrix} (v_1 \mid v_2) = \vartheta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \end{pmatrix} (v_1 + \pi i \mid v_2) \cdot e^{\varepsilon_1 \pi i};$$

$$= \vartheta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \end{pmatrix} (v_1 \mid v_2 + \pi i) \cdot e^{\varepsilon_2 \pi i};$$

$$\vartheta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \end{pmatrix} (v_1 \mid v_2) = \vartheta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \end{pmatrix} (v_1 + a_{11} \mid v_2 + a_{12}) \cdot e^{a_{11} + 2v_1 + \varepsilon_1' \pi i};$$

$$= \vartheta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \end{pmatrix} (v_1 + a_{12} \mid v_2 + a_{22}) \cdot e^{a_{22} + 2v_2 + \varepsilon_2' \pi i}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass die Parameterpaare $v_1 \mid v_2$ und $-v_1 \mid -v_2$ denselben Punkt bezeichnen, dass also ein Umkehren der Vorzeichen den Punkt auf der Fläche ungeändert lässt. Will man nun von dem gegebenen Punkte $v_1 \mid v_2$ übergehen zu seinem Spiegelbild in Bezug auf die Congruenz (12), so wechseln die Coordinaten x_1, x_2 und x'_1, x'_2 ihr Vorzeichen und zugleich mit ihnen die Functionen $\vartheta \binom{11}{01}(v_1 \mid v_2)$ und $\vartheta \binom{01}{01}(v_1 \mid v_2)$; damit dieses aber geschieht, muss man die Argumente $v_1 \mid v_2$ vermehren um die Perioden $a_{11} \mid a_{12}$. Man kommt durch solche Betrachtungen zu folgendem Schema:

die Spiegelung geschieht an

(12) durch Addition der Perioden $a_{11} \mid a_{12}$
(13) „ „ „ „ $a_{11} + \pi i \mid a_{12}$
(14) „ „ „ „ $\pi i \mid \pi i$
(15) „ „ „ „ $a_{12} + \pi i \mid a_{22} + \pi i$
(16) „ „ „ „ $a_{12} + \pi i \mid a_{22}$
(23) „ „ „ „ $\pi i \mid o$
(24) „ „ „ „ $a_{11} + \pi i \mid a_{12} + \pi i$
(25) „ „ „ „ $a_{11} + a_{12} + \pi i \mid a_{12} + a_{22} + \pi i$
(26) „ „ „ „ $a_{11} + a_{12} + \pi i \mid a_{12} + a_{22}$
(34) „ „ „ „ $a_{11} \mid a_{12} + \pi i$
(35) „ „ „ „ $a_{11} + a_{12} \mid a_{12} + a_{22} + \pi i$
(36) „ „ „ „ $a_{11} + a_{12} \mid a_{12} + a_{22}$
(45) „ „ „ „ $a_{12} \mid a_{22}$
(46) „ „ „ „ $a_{12} \mid a_{22} + \pi i$
(56) „ „ „ „ $o \mid \pi i$.

Von den Parametern

$$v_1 \mid v_2 = \int_{\alpha}^{\lambda_1} dv_1 - \int_{\alpha}^{\lambda_2} dv_1 \mid \int_{\beta}^{\lambda_1} dv_2 - \int_{\beta}^{\lambda_2} dv_2$$

eines Punktes der Fläche ausgehend gelangt man also zu 15 weiteren Schnittpunkten der Haupttangentencurven λ_1

und λ_2 durch Addition von Perioden; wie erhält man aber die Parameter der 16 noch übrigen Schnittpunkte von λ_1 und λ_2? In der Rieman'schen Fläche, welche zu unseren Integralen gehört, existiren zwei Punkte λ_1 und zwei Punkte λ_2 entsprechend den beiden Blättern, die wir zum Unterschied mit λ_1^+, λ_1^- und λ_2^+, λ_2^- bezeichnen wollen. Nehmen wir als Grenzen unserer Integrale λ_1^+ und λ_2^+ oder auch λ_1^- und λ_2^-, wodurch sich ja nur die Vorzeichen von $v_1 \mid v_2$ umkehren, so erhalten wir 16 Schnittpunkte von λ_1 und λ_2, nehmen wir dagegen λ_1^+ und λ_2^- resp. λ_1^- und λ_2^+ als Grenzen, so erhalten wir die 16 anderen Schnittpunkte von λ_1 und λ_2. Bezeichnen wir demnach:

$$\int_\alpha^{\lambda_1} dv_1 \;\Big|\; \int_\beta^{\lambda_1} dv_2 \quad \text{mit } u_1 \mid u_2$$

$$\int_\alpha^{\lambda_2} dv_1 \;\Big|\; \int_\beta^{\lambda_2} dv_2 \quad \text{mit } u'_1 \mid u'_2,$$

und eine beliebige Perioden-Combination mit $P_1 \mid P_2$, so sind durch $u_1 - u'_1 + P_1 \mid u_2 - u'_2 + P_2$ und $u_1 + u'_1 + P_1 \mid u_2 + u'_2 + P_2$ alle 32 Schnittpunkte der beiden Haupttangentencurven λ_1 und λ_2 dargestellt, da ja

$$\int_\alpha^{\lambda_1^-} dv_1 \;\Big|\; \int_\beta^{\lambda_1^-} dv_2 \equiv -\int_\alpha^{\lambda_1^+} dv_1 \;\Big|\; -\int_\beta^{\lambda_1^+} dv_2.$$

Die 32 Schnittpunkte zweier Haupttangentencurven zerfallen also in 2 Klassen; die 16 Punkte der einen Art gehen durch Spiegelung an den Congruenzen aus einem Punkt hervor, während man durch Spiegelung dieses Punktes an den 6 Fundamentalcomplexen und den 10 Hyperboloiden die Tangentialebenen in den Punkten der anderen Art erhält.

Nun ist bekannt, dass die 16 Punkte der ersten Art $u_1 - u'_1 + P_1 \mid u_2 - u'_2 + P_2$ zu je 6 in 16 Ebenen liegen, welche die Kummer'sche Fläche berühren, und dass ein solcher Berührungspunkt von einem Punkte der zweiten Art gebildet wird und umgekehrt; es fragt sich jetzt: die beiden Parameter des Berührungspunktes zu finden, wenn diejenigen der 6 in der Berührungsebene liegenden Punkte erster Art gegeben sind. Bevor ich jedoch zur Beantwortung dieser Frage schreite, werde ich die speciellen Fälle näher erörtern, in welchen eine oder beide der sich schneidenden Haupttangentencurven in eine der 6 ausgezeichneten Curven übergangen ist. Seien die beiden Curven λ_1 und k_1 gegeben, so schneiden sich diese nur noch in 16 getrennten Punkten, je ein Punkt der ersten Art ist mit je einem der zweiten Art zusammengefallen; dieses Resultat muss sich bei der gemachten Parametervertheilung bestätigen. Ein Punkt der ersten Art hat jetzt die Parameter:

$$v_1 \mid v_2 = \int_\alpha^{\lambda_1} dv_1 - \int_\alpha^{k_1} dv_1 \;\Big|\; \int_\beta^{\lambda_1} dv_2 - \int_\beta^{k_1} dv_2 \Bigg\} \text{vermehrt um Perioden}$$

$$= u_1 - \left(\frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{12}}{2}\right) \Big| u_2 - \left(-\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{12}}{2} + \frac{a_{22}}{2}\right)$$

und ein solches Parameterpaar deckt sich offenbar mit einem der zweiten Art:

$$u_1 + \left(\frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{12}}{2}\right) + P_1 \mid u_2 + \left(-\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{12}}{2} + \frac{a_{22}}{2}\right) + P_2.$$

Wenden wir uns endlich zu den Inflexionspunkten, d. h. zu den Schnittpunkten zweier ausgezeichneten Haupttangentencurven, so haben wir es nur noch mit 8 getrennten Punkten zu thun. Betrachten wir etwa die beiden Curven k_1 und k_2, so wird ein Argumentenpaar etwa:

$\frac{a_{11}}{2} \mid \frac{a_{12}}{2}$, und hieraus lassen sich durch Addition von Perioden nur noch 7 andere Werthe ableiten.

Kehren wir jetzt noch einmal zu dem vorigen Fall zurück und betrachten 6 in einer Tangentialebene gelegene Punkte erster Art, so ergeben sich diese z. B. aus: $u_1 - \left(\frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{12}}{2}\right) \mid u_2 - \left(-\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{12}}{2} + \frac{a_{22}}{2}\right)$ durch Addition solcher Perioden, welche sich auf die Congruenzen (12), (13), (14), (15), (16) beziehen. Hier fällt der Berührungspunkt der Tangentialebene mit: $u_1 - \left(\frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{12}}{2}\right) \mid u_2 - \left(-\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{12}}{2} + \frac{a_{22}}{2}\right)$ zusammen, und lässt sich als Punkt zweiter Art in die Form bringen:

$$u_1 + \left(\frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{12}}{2}\right) + a_{11} + a_{12} \mid u_2 + \left(-\frac{\pi i}{2} + \frac{a_{12}}{2} + \frac{a_{22}}{2}\right) + \pi i + a_{12} + a_{22}.$$

Was aber hier für den speciellen Fall gilt, muss in Folge der Continuität auch für den allgemeinen gelten. Gehen wir von dem Punkt $u_1 - u_1' \mid u_2 - u_2'$ aus, und nehmen diejenige Ebene, welche ihm durch den Complex (1) entspricht, so ist ihr Berührungspunkt $u_1 + u_1' + a_{11} + a_{12} \mid u_2 + u_2' + \pi i + a_{12} + a_{22}$, während die 6 in ihr gelegenen Punkte erster Art die Parameter aufweisen:

$u_1 - u_1' \mid u_2 - u_2'$, $\quad u_1 - u_1' + \pi i \mid u_2 - u_2' + \pi i$,

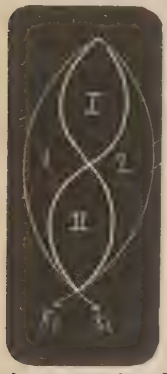
$u_1 - u_1' + a_{11} \mid u_2 - u_2' + a_{12}$, $\quad u_1 - u_1' + a_{12} + \pi i \mid u_2 - u_2' + a_{22} + \pi i$,

$u_1 - u_1' + a_{11} + \pi i \mid u_2 - u_2' + a_{12}$, $\quad u_1 - u_1' + a_{12} + \pi i \mid u_2 - u_2' + a_{22}$.

Hiermit ist die oben gestellte Frage erledigt. Zugleich haben wir das nöthige Material gesammelt, um die Parametervertheilung auf der Fläche angeben zu können, wir wenden uns desshalb zunächst zur Vertheilung auf einem hyperbolischen Segmente der Fläche und dann zur Vertheilung über die ganze Fläche.

§ 2. Darstellung der Parameter auf den hyperbolischen Segmenten.

Auf jedem hyperbolischen Segmente liegt ein Doppelinflexionspunkt, dessen Parameter von halben Perioden gebildet wird (abgesehen von den dabei auftretenden ganzen Perioden); wählen wir speciell einen Schnittpunkt der Curven k_1 und k_2 als Ausgangspunkt, dessen Parameter $\frac{a_{11}}{2} \mid \frac{a_{12}}{2}$ sind.

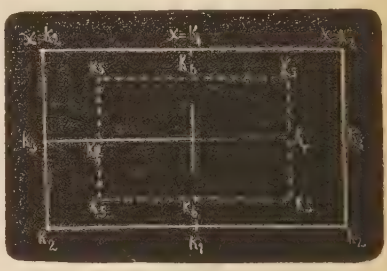


Die beiden Haupttangentencurven k_1 und k_2 theilen das hyperbolische Segment der Figur in 4 verschiedene Theile; von einem Punkte λ_1 λ_2 (die Werthe von λ_1 und λ_2 liegen zwischen k_1 und k_2) im Theile 1 gelegen gelangt man zu dem Punkte λ_1 λ_2 in 2 durch die Congruenz (12), dieselbe Congruenz vermittelt den Uebergang von I zu II oder umgekehrt. Die Punkte von 1 resp. 2 werden auf die Ebenen von I resp. II durch den Complex (1) bezogen, während der Complex (2) von Punkten in 1 resp. 2 zu Ebenen in II resp. I überführt. Will man nun die Ausbreitung der Integrale auf dem gegebenen Zweiecke ausführen, so muss man die Riemann'sche Fläche durch ein Querschnittsystem in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln, damit man bei der Integration von λ_1 nach λ_2 nicht verschiedene Werthe erhält. Wählt man die oben angegebene Zerschneidung und zieht die Schnitte bis an die Verzweigungslinien zusammen, so erhält man als Bilder der so zerschnittenen Fläche in der u_1-Ebene sowohl wie in der u_2-Ebene

wobei $u_1 = \int_\alpha^\lambda \frac{m + n\lambda}{\sqrt{A}}\, d\lambda$, $u_2 = \int_\alpha^\lambda \frac{m' + n'\lambda}{\sqrt{A}}\, d\lambda$

2 übereinander liegende Parallelogramme, welche in 2 Punkten mit einander verzweigt sind.*) Hier genügt es die eine Kante der Doppelparallelogramme zu betrachten, in der Figur die untere. Bezeichnet man der Kürze halber:

$$\int_\alpha^{x+} du_1 = u_1^x, \qquad \int_\beta^{x+} du_2 = u_2^x,$$



und

$$\int_\alpha^{k_i} du_1 = u_1^i, \qquad \int_\beta^{k_i} du_2 = u_2^i,$$

so erhalten die Punkte dieser Kante in der u_1-Ebene resp. u_2-Ebene die Coordinaten:

k_2	x^-	y^-	k_1	y^+	x^+	k_2
$u_1' - \frac{a_{11}}{2}$	$2u_1' - u_1^x$	$2u_1' - u_1^y$	u_1'	u_1^y	u_1^x	$u_1' + \frac{a_{11}}{2}$

k_2	x^-	y^-	k_1	y^+	x^+	k_2
$u_2' - \frac{a_{12}}{2}$	$2u_2' - u_2^x$	$2u_2' - u_2^y$	u_2'	u_2^y	u_2^x	$u_2' + \frac{a_{12}}{2}$

Hat demnach ein Punkt in dem Theile 1 des hyperbolischen Flächenstücks die Parameter $u_1^x + u_1^y \mid u_2^x + u_2^y$ oder was damit identisch ist $4u_1' - u_1^x - u_1^y \mid 4u_2' - u_2^x - u_2^y$ (da $4u_1' \mid 4u_2' = 2a_{11} + 2a_{12} \mid 2a_{12} + 2a_{22} - 2\pi i$) so erhält der entsprechende Punkt auf I die Parameter

*) Näheres siehe Prym in der bereits citirten Abhandlung § 7.

$2\,u_1' - u_1^x + u_1^y \mid 2\,u_2' - u_2^x + u_2^y$ oder auch $2\,u_1' - u_1^y + u_1^x \mid 2\,u_2' - u_2^y + u_2^x$, und diese Werthe stimmen ganz mit den früheren Resultaten überein. Um weiterhin auch zu Punkten auf 2 und II zu gelangen, muss man an das obige Parallelogramm nach rechts an die Seite $k_2\ k_3\ k_2$ ein neues anfügen, was in der u_1-Ebene eine Verschiebung um die Periode a_{11}, in der u_2-Ebene um a_{12} bedeutet, und dann den einen Integralwerth in dem ursprünglichen Parallelogramme den anderen in dem neuen aufsuchen. Auf diese Weise erhält man die ursprünglichen Parameter wieder vermehrt um die Perioden $a_{11} \mid a_{12}$.

Diese ganze Betrachtungsweise, welche sich der zerschnittenen Riemann'schen Fläche bedient, um ein hyperbolisches Flächenstück mit den zugehörigen Integralwerthen zu überdecken, lässt sich durch eine andere ersetzen, die sich mehr an die Verhältnisse der Kummer'schen Fläche anschliesst und mit diesen operirt. Wenn man nämlich den Integrationsweg auf eine bestimmte Bahn beschränkt, wird man mit der unzerschnittenen Fläche ausreichen. Nun sind aber die Integralwerthe in dem Doppelinflexionspunkte gegeben, und zwar sind sie:

$$-\frac{a_{11}}{2} \Big| -\frac{a_{12}}{2} = \int_{k_1}^{k_2} du_1 \Big| \int_{k_1}^{k_2} du_2\,,$$

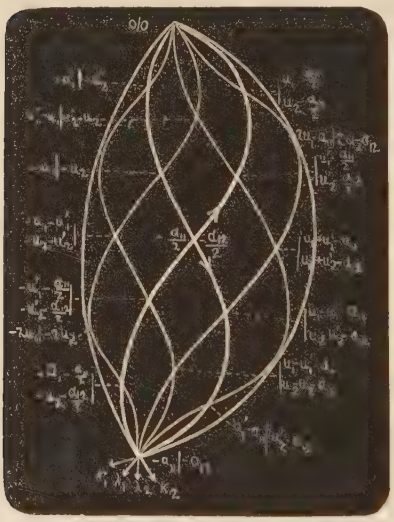
wobei der Integrationsweg im oberen Blatte auf der linken Seite der reellen Axe hinerstreckt ist, von ihnen kann man also ausgehen, um die Parameter eines beliebigen Punktes des zugehörigen hyperbolischen Flächentheils zu bestimmen. Einen Punkt auf der Haupttangentencurve k_1 resp. k_2 er-

hält man dann, indem man zu $\int_{k_1}^{k_2} du_1 \,|\, \int_{k_1}^{k_2} du_2$ noch

$\pm \int_{k_2}^{\lambda} du_1 \,|\, \pm \int_{k_2}^{\lambda} du_2$ resp. $\pm \int_{k_1}^{\lambda} du_1 \,|\, \pm \int_{k_1}^{\lambda} du_2$

addirt, einen beliebigen Punkt λ_1, λ_2 demnach durch Addition von: $\pm \int_{k_1}^{\lambda_1} du_1 \pm \int_{k_2}^{\lambda_2} du_1 \,|\, \pm \int_{k_1}^{\lambda_1} du_2 \pm \int_{k_2}^{\lambda_2} du_2$,

und zwar sind die Integrationswege immer auf der linken Seite der reellen Axe zu nehmen. Bezeichnet man:



$$\int_{k_2}^{\lambda_1} du_1 \,|\, \int_{k_2}^{\lambda_1} du_2 = u_1 \,|\, u_2$$

$$\int_{k_2}^{\lambda_1} du_1 \,|\, \int_{k_2}^{\lambda_2} du_2 = u'_1 \,|\, u'_2$$

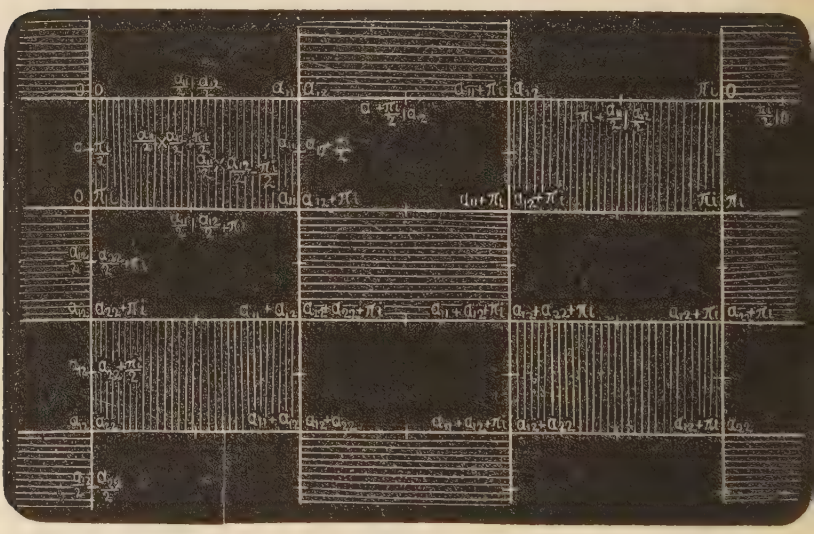
und nimmt die positiven Vorzeichen, wenn man in der Richtung der Pfeile sich bewegt, die negativen im entgegengesetzten Falle, so wird man zu der in der Figur angegebenen Vertheilung geführt. Hier ist zunächst zu erwähnen, dass der eine der beiden Pfeile willkürlich gewählt werden kann; dadurch erhält der eine Knotenpunkt die

Parameter o | o, der andere — a_{11} | — a_{12} und hiermit ist auch der zweite Pfeil bestimmt, da den Knotenpunkten nur ein Parameterpaar zugehören soll.*) Anstatt das — Zeichen vor die Integrale zu setzen, kann man auch ihre oberen Grenzen ändern, indem man die Punkte λ_1, λ_2 der Riemann-schen Fläche im unteren Blatte nimmt; man hat dann zu $-\frac{a_{11}}{2}$ | $-\frac{a_{12}}{2}$ immer 2 Integrale zu addiren; bewegt man sich in der Richtung der Pfeile, so verläuft der Integrationsweg im oberen Blatte, bewegt man sich in der entgegengesetzten Richtung so verläuft er im unteren Blatte. Dieses kommt, wie man leicht übersieht, darauf hinaus, dass man den einen Zweig einer Haupttangentencurve λ (in der Figur den ausgezogenen) dem Punkte λ im oberen Blatte der Riemann'schen Fläche zuordnet, den anderen (in der Figur den punktirten) dagegen dem Punkte λ im unteren Blatte entsprechen lässt. Für die beiden ausgezeichneten Haupttangentencurven fallen beide Zweige zusammen, dem entsprechend dass die Verzweigungspunkte k_1 und k_2 beiden Blättern gemeinsam sind. **)

*) Wollte man die Kummer'sche Fläche als Umhüllungsgebilde ihrer Tangentialebenen betrachten, so müsste man einen der beiden Pfeile umkehren, da dann den Doppelebenen nur ein Parameterpaar zukommen würde.

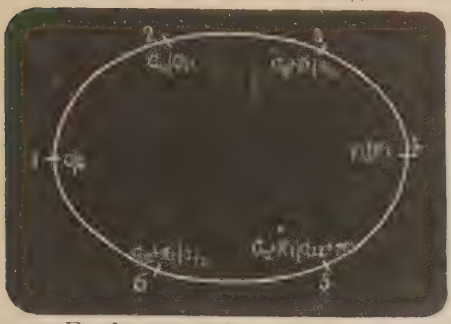
**) Um sich ein anschauliches Bild von der Ausbreitung des $\int du$ auf dem vorliegenden hyperbolischen Segmente zu machen, denke man sich die Integralwerthe als Farbentöne auf demselben aufgetragen, dem Werthe o entsprechend volles Licht dem Werthe ∞ entsprechend vollen

Nachdem ich so die Verhältnisse auf einem einzelnen hyperbolischen Flächenstücke beleuchtet habe, mag es gestattet sein, zur Anordnung der Parameterwerthe auf der ganzen Fläche überzugehen. Es genügt hierbei, sich an die Periodencombinationen zu erinnern, welche den Transformationen durch die 15 Congruenzen entsprechen, um unmittelbar das richtige Bild entwerfen zu können. Ich werde mich dazu wieder der früheren schematischen Zeichnung der Fläche bedienen und auf jedem der 8 Flächentheile die 6 Doppelinflexionspunkte mit ihren Parametern markiren, wodurch folgende Anordnung entsteht:



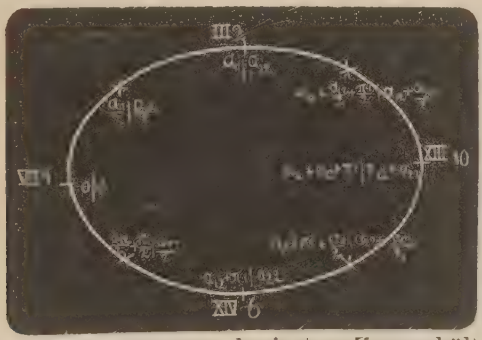
Schatten. Man erhält dann das Bild auf folgende Weise Man lege die ganze Fläche mit dem Tone $\frac{a_{11}}{2}$ an, und trage dann von der Curve k_2 nach der einen Seite hin Töne von o anfangend und bis $\frac{a_{11}}{2}$ ansteigend auf, deren Begrenzungen immer von Haupttangentencurven gebildet werden, nach der anderen Seite nehme man ebenso die Töne weg, dann werden sich diese Tonstärken in gleicher Weise an die Curve k_1

Die Parametervertheilung in der Doppelebene VII erhellt aus der beistehenden Figur. Durch Addition von Perioden erhält man die 15 weiteren Doppelebenen, dabei gehen 4 Knotenpunkte in neue über, während die beiden übrigen sich vertauschen.



Es dürfte nicht uninteressant sein auch für eine der 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven etwa für k_1 die Anordnung beizufügen. Eine solche Curve besteht aus 4 getrennten Zügen, nämlich:

VII 1, III 2, XIII 10, XIV 6; II 3, X 13, VI 14, I 7; XVI 4, XI 8, IX 12, V 15; XV 5, IV 16, VIII 11, XII 9; was mit der gegebenen Vertheilung der Integrale zusammen stimmt.



Den zweiten, dritten und vierten Zug erhält man, indem man beziehungsweise die Perioden: $\pi i \mid o$, $\pi i \mid \pi i$, $o \mid \pi i$ addirt.

---

anschliessen. In der Nähe des einen Knochenpunktes herrscht volles Licht in der Nähe des anderen voller Schatten. Entwirft man ein analoges Bild für $\int du_2$ aber in anderer Farbe, so ist jeder Punkt eindeutig bestimmt durch die Intensität der beiden darüber lagernden Töne.

§ 3. Darstellung der Parameter auf den elliptisch gekrümmten Segmenten.

Bis hierher haben wir uns nur mit den hyperbolischen Partien der Kummer'schen Fläche beschäftigt, wir wollen uns jetzt zu den 32 elliptischen Theilen wenden. Diese elliptischen Theile sind von zweierlei Art, wie man sich sofort überzeugt, wenn man die Bewegung von 32 zusammengehörigen Punkten verfolgt. Lässt man nämlich einen dieser Punkte von einem hyperbolischen Theile über einen der Kegelschnitte hinweg auf einen elliptischen Theil rücken, so thun dasselbe noch 15 weitere Punkte, während die 16 übrigen durch die Knotenpunkte sich hindurch bewegen und so auf ein elliptisches Flächenstück gelangen. Die 16 elliptischen Dreiecke einer Art bedecken 4 der 8 tetraëderartigen Flächentheile der Kummerschen Fläche und zwar solche 4, welche in keinem Knotenpunkte zusammenstossen, ebenso ist es mit den Dreiecken der anderen Art. Die Dreiecke einer Art gehen aus einem von ihnen durch Anwendung der Transformationen, welche den 15 Congruenzen entsprechen, hervor; dieses stimmt auch mit unserer Parametervertheilung, indem man die 16 Dreiecke der einen Art durch Addition von Perioden aus dem Dreiecke: o | o, a_{11} | a_{12}, o | πi, die der anderen Art ebenso aus dem Dreiecke o | o, a_{12} | a_{22}, πi | o erhält. Liegen 4 elliptische Theile auf einem und demselben tetraëderartigen Flächentheile, so erhält man aus einem ihrer Punkte die Parameter der 3 entsprechenden durch Addition der Perioden: a_{11} | a_{12}, o | πi, a_{11} | $a_{12} + \pi i$ falls man sich auf: I, II,

III oder IV befindet, im entgegengesetzten Fall durch Addition der Perioden: $a_{12} \mid a_{22}$, $\pi i \mid o$, $a_{12} + \pi i \mid a_{22}$. Gleichzeitig ersieht man, dass die Gesammtheit der Punkte auf I, in die Gesammtheit der Punkte auf II resp. III, resp. IV übergeht durch Hinzufügen der Perioden: $\pi i \mid o$ resp $a_{12} \mid a_{22}$ resp. $a_{12} + \pi i \mid a_{22}$, während man von 1 nach 2, 3 und 4 gelangt vermöge der Perioden $a_{11} \mid a_{12}$, $o \mid \pi i$, $a_{11} \mid a_{12} + \pi i$.

Es fehlt zu einem vollständigen Bilde der Parametervertheilung auf der Kummer'schen Fläche nur noch die Kenntniss der Anordnung auf einem einzelnen elliptischen Flächenstück. Für eine solche Partie sind die Haupttangenten und somit auch die Parameter λ_1, λ_2 jedes Punktes conjugirt imaginär, nur für die Begrenzungslinien fallen die beiden Haupttangenten zusammen und werden reell. Nehmen wir ein specielles Beispiel um uns kürzer ausdrücken zu können, etwa das Dreieck $o\ o$, $a_{11} \mid a_{12}$, $a_{11} \mid \pi i + a_{12}$. Wir haben nun früher gesehen, dass einem Punkte der Seite $o \mid o$, $a_{11} \mid a_{12}$ die Parameter: $2 \int_{k_2}^{\lambda} du_1 \mid 2 \int_{k_2}^{\lambda} du_2$ zugehören oder was dasselbe ist

$\int_{\lambda-}^{\lambda+} du_1 \mid \int_{\lambda-}^{\lambda+} du_2$, die Integrale hingeleitet auf dem in der Figur angegebenen Wege; gehen wir jetzt in das Innere

des elliptischen Dreiecks, so werden die Grenzen conjugirt imaginär und bleiben es immer, so lange wir das Dreieck nicht verlassen. Daraus können wir sofort den Schluss ziehen, dass der Integrationsweg nirgends mehr die reelle Axe durchschneiden darf, damit sind aber die Integrale $\int_{a-bi}^{a+bi} du_1 \mid \int_{a-bi}^{a+bi} du_2$ eindeutig bestimmt ohne dass wir Gebrauch von der zerschnittenen Riemann'schen Fläche machen. Nähern wir uns einer der Seiten $o \mid o$, $a_{11} \mid \pi i + a_{12}$ resp. $a_{11} \mid \pi i + a_{12}$, $a_{11} \mid a_{12}$, so nähern sich die Punkte $a \pm bi$ der Verzweigungslinie $k_3\ k_4$ resp. $k_5\ k_6$, bewegen wir uns dagegen in irgend einer Richtung auf einen der Eckpunkte zu, so bewegen sich die Punkte $a \pm bi$ auf einen Punkt der reellen Axe zu zwischen $k_2\ k_3$, $k_4\ k_5$ oder $k_6\ k_1$. Lassen wir demnach die Punkte $a \pm bi$ in der Nähe der reellen Axe von k_1 aus über $k_2\ k_3\ k_4\ k_5\ k_6$ und zurück nach k_1 laufen, so läuft der Punkt auf der Kummerschen Fläche von $a_{11} \mid a_{12}$ nach $o \mid o$ dicht an der Seite hin, in $o \mid o$ bleibt er eine Zeit lang stehen, wobei sich nur die Tangente in diesem Knotenpunkt ändert, bis sie die Seite $o \mid o$, $a_{11} \mid \pi i + a_{12}$ tangirt, dann bewegt sich der Punkt an dieser entlang, ruht wieder in $a_{11} \mid \pi i + a_{12}$ und kehrt endlich auf der dritten Seite nach $a_{11} \mid a_{12}$ zurück. Genau entgegengesetzt verhält es sich bei den Dreiecken der anderen Art, für welche das Dreieck $o \mid o$, $a_{12} \mid a_{22}$, $a_{12} + \pi i \mid a_{22}$ als Repräsentant angesehen werden kann. Hier liegt einer der beiden Punkte $a \pm bi$ im unteren Blatte, sie fallen also zusammen auf $k_1\ k_2$, $k_3\ k_4$, $k_5\ k_6$ während sie auf $k_2\ k_3$, $k_4\ k_5$, $k_6\ k_1$ in verschiedenen Blättern liegen.

Welche Abänderungen sich ergeben falls die Knotenpunkte nicht mehr alle reell, sondern theilweise imaginär

sind, lässt sich leicht übersehen. Die Verhältnisse auf den hyperbolischen Segmenten ändern sich nicht, (nur wird ihre Anzahl geringer) wenn 1 Paar oder 2 Paare Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche conjugirt imaginär werden, dagegen werden die Verhältnisse auf den elliptischen Segmenten etwas andere. Wir erhielten eine Umlaufung eines elliptischen Segmentes, wenn wir die beiden Grenzpunkte des Integrals in der Nähe der positiven Axe, den einen rechts, den andern links derselben, von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen liessen, wir sahen dabei wie die 3 Eckpunkte und wie die 3 Seiten entstanden; gleichzeitig fanden wir, dass es zweierlei Dreiecke gebe, dem entsprechend dass man beide Integrationswege in demselben Blatte oder in verschiedenen Blättern nahm. Ist nun ein Paar Verzweigungspunkte etwa k_1 und k_2 conjugirt imaginär, dann schneidet ihre Verzweigungslinie die positive Axe, der Weg schliesst sich erst nach einer doppelten Durchlaufung der Axe; man sieht sofort, dass es noch 2 Arten von elliptischen Segmenten gibt, und dass diese jetzt 4 Eckpunkte und 4 Seiten besitzen, zugleich sei hervorgehoben, dass man den ganzen Rand ohne Unterbrechung durchlaufen kann. Sind 2 Paar Verzweigungspunkte conjugirt imaginär, etwa k_1, k_2 und k_3, k_4, so schliessen sich die Wege der beiden Grenzpunkte des Integrals zwar schon nach einer einzigen Durchlaufung der positiven Axe, der Integralwerth hat sich jedoch um eine Periode geändert und kehrt erst nach einer zweiten Durchlaufung zu seinem ursprünglichen Werthe zurück (indem wir alle Werthe als gleich ansehen, welche sich um doppelte Perioden unterscheiden); daraus ergibt sich ein Rand mit 2 Ecken und 2 Seiten; das elliptische Segment besitzt aber noch einen zweiten solchen Rand, der jedoch nirgends mit dem ersten zusammenhängt, zu welchem man gelangt, wenn man blos ein Paar conjugirt imaginäre Verzweigungspunkte umkreist; auch hier gibt es noch 2 Arten ellip-

tische Segmente, sie besitzen auch 4 Eckpunkte und 4 Seiten, aber diese Segmente haben entgegen dem vorigen Falle den Zusammenhang 2. Sind endlich die 3 Paare Verzweigungspunkte conjugirt imaginär, so gibt es nur noch 2 elliptische Segmente, von jeder Art eines, das eine wird von 4 geschlossenen Curven, das andere von 4 Eckpunkten begrenzt, dem entsprechend dass die beiden Grenzpunkte des Integrals in verschiedenen Blättern liegen oder in demselben; die hyperbolischen Segmente werden von einem Kegelschnitt begrenzt.

III. Theil.

§ 1. Parametervertheilung nach Cayley-Borchardt.*)

Wir wollen jetzt unsere Aufmerksamkeit auf diese neue Parametervertheilung wenden, welche sich auf die bekannte biquadratische Relation zwischen 4 Theta-Functionen stützt. Nach Göpel existiren 60 solcher Relationen, wovon 4 immer in der Weise zusammengehören, dass sie alle 16 Theta's umfassen. Jede dieser Gruppen von 4 Relationen enthält eine Relation zwischen nur geraden Theta's, so dass es im Ganzen 15 solcher biquadratischen Gleichungen gibt, und diese 15 Gleichungen geben zu 15 verschiedenen Darstellungen der Kummerschen Fläche Anlass. Setzt man nämlich die 4 Theta's einer Göpelschen Relation (noch multiplicirt mit gewissen achten Wurzeln der Einheit) gleich 4 Coordinaten x, y, z, w, so geht dieselbe in die Gleichung der Kummerschen Fläche über, bezogen auf eins der 15 Fundamentaltetraëder. Borchardt gibt eine dieser Identitäten an und zwar in der Weierstrass'schen**) Bezeichnung, die ich der bequemeren Schreibweise halber ebenfalls benutzen will; sie ist:

*) Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 83.

**) Am Schluss ist eine Vergleichungstabelle angefügt.

$$\left\{\begin{array}{l} \vartheta^4_5+\vartheta^4_0+\vartheta^4_{23}+\vartheta^4_{14} \\ +2\,\dfrac{c_5c_0c_{23}c_{14}\,\Pi_{\varepsilon,\varepsilon'}(c^2_5+\varepsilon c^2_0+\varepsilon' c^2_{23}+\varepsilon\varepsilon' c^2_{14})\,\vartheta_5\vartheta_0\vartheta_{23}\vartheta_{14}}{(c^2_5c^2_0-c^2_{23}c^2_{14})(c^2_5c^2_{23}-c^2_0c^2_{14})(c^2_5c^2_{14}-c^2_0c^2_{23})} \\ -\dfrac{c^4_5+c^4_0-c^4_{23}-c^4_{14}}{c^2_5c^2_0-c^2_{23}c^2_{14}}\,(\vartheta^2_5\vartheta^2_0+\vartheta^2_{23}\vartheta^2_{14}) \\ -\dfrac{c^4_5+c^4_{23}-c^4_0-c^4_{14}}{c^2_5c^2_{23}-c^2_0c^2_{14}}\,(\vartheta^2_5\vartheta^2_{23}+\vartheta^2_0\vartheta^2_{14}) \\ -\dfrac{c^4_5+c^4_{14}-c^4_0-c^4_{23}}{c^2_5c^2_{14}-c^2_0c^2_{23}}\,(\vartheta^2_5\vartheta^2_{14}+\vartheta^2_0\vartheta^2_{23}) \end{array}\right\} = 0$$

wobei die c die Nullwerthe der ϑ bezeichnen, und: $\varepsilon,\ \varepsilon' = \pm 1$.

Setzt man:

$$\vartheta_5 = w,\quad \vartheta_0 = x,\quad \vartheta_{23} = y,\quad \vartheta_{14} = z;$$
$$c_5 = w_0,\quad c_0 = x_0,\quad c_{23} = y_0,\quad c_{14} = z_0,$$

so folgt die Gleichung der Kummer'schen Fläche;

$$\left\{\begin{array}{l} w^4+x^4+y^4+z^4 \\ +2\,\dfrac{w_0x_0y_0z_0\,\Pi_{\varepsilon,\varepsilon'}(w^2_0+\varepsilon x^2_0+\varepsilon' y^2_0+\varepsilon\varepsilon' z^2_0)\,w\,x\,y\,z}{(w^2_0x^2_0-y^2_0z^2_0)(w^2_0y^2_0-x^2_0z^2_0)(w^2_0z^2_0-x^2_0y^2_0)} \\ -\dfrac{w^4_0+x^4_0-y^4_0-z^4_0}{w^2_0x^2_0-y^2_0z^2_0}\,(w^2x^2+y^2z^2) \\ -\dfrac{w^4_0+y^4_0-x^4_0-z^4_0}{w^2_0y^2_0-x^2_0z^2_0}\,(w^2y^2+x^2z^2) \\ -\dfrac{w^4_0+z^4_0-x^4_0-y^4_0}{w^2_0z^2_0-x^2_0y^2_0}\,(w^2z^2+x^2y^2) \end{array}\right\} = 0$$

wobei die Constanten: $x_0\ y_0\ z_0\ w_0$ die Coordinaten eines Knotenpunktes bezeichnen.

Die Flächengleichung ändert sich nicht, wenn man zwei der 4 Coordinaten negativ nimmt, oder wenn man dieselben in 2 Paare theilt, und die Coordinaten jedes Paares vertauscht. Dadurch erhält man aus einem Punkte x y z w noch 15 weitere Punkte und zwar, wie man sich leicht überzeugt, eben diejenigen, welche aus x y z w durch die Transformationen der 15 Congruenzen hervorgehen. Der Nachtheil der neuen Darstellungsweise liegt nun darin, dass solche 16 Punkte, die wie die liniengeometrische Betrachtung zeigt, selbstverständlich zusammengehören, nicht mehr durch Addition von ganzen Periodencombinationen aus einander hervorgehen. Es tritt vielmehr jetzt eine Scheidung ein; die gleichmässige Operation der Spiegelung an einer der 15 Congruenzen wird nun zum Theil durch Vorzeichenänderung, zum Theil durch die oben definirte Vertauschung wiedergegeben; demgemäss erhalten wir aus den Parametern eines Punktes diejenigen der 15 abgeleiteten theils durch Addition von ganzen, theils von halben Perioden. So werden in dem vorliegenden Falle: $w = \vartheta_5$, $x = \vartheta_0$, $y = \vartheta_{23}$, $z = \vartheta_{14}$, die Zeichenwechsel durch Addition von: $\tau_{11} \mid \tau_{12}$ oder $1 \mid 0$ oder $\tau_{11} + 1 \mid \tau_{12}$ bedingt, während eine Vermehrung der Parameter um: $\frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2} \Big| \frac{\tau_{12} + \tau_{22}}{2}$, resp. $\frac{1}{2} \Big| \frac{1}{2}$ resp. $\frac{\tau_{11} + \tau_{12} + 1}{2} \Big| \frac{\tau_{12} + \tau_{22} + 1}{2}$ jene Vertauschungen bewirkt. Diese beiden Operationen der Vertauschung und des Vorzeichenwechsels sind aber nicht principiell unter einander verschieden, sondern sie hängen lediglich von der Wahl des Fundamentaltetraëders ab, so zwar, dass 2 Punkte einmal durch Permutation der Coordinaten, das andere Mal durch Umkehren zweier Vorzeichen auseinander abgeleitet werden. Diese Willkürlichkeit ist es eben, welche 15 von einander verschiedene Zuordnungen zulässt, während die im vorigen Kapitel gegebene Darstellung eine eindeutige war.

§ 2. Die quadratische*) Transformation der hyperelliptischen Functionen.

Es mögen die beiden hyperelliptischen Systeme gegeben sein:

$$1\left\{\begin{aligned}&\int_{k_4}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+\int_{k_2}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=2K_{11}v_1+2K_{12}v_2,\\&\int_{k_4}^{x_1}\frac{xdx}{\sqrt{R(x)}}+\int_{k_2}^{x_2}\frac{xdx}{\sqrt{R(x)}}=2K_{21}v_1+2K_{22}v_2,\text{ wobei}\end{aligned}\right.$$

$$R(x)=(k_1-x)(k_2-x)(k_3-x)(k_4-x)(k_5-x)(k_6-x),$$

$$2\left\{\begin{aligned}&\int_{\lambda_4}^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}+\int_{\lambda_2}^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}=2C_{11}v'_1+2C_{12}v'_2,\\&\int_{\lambda_4}^{y_1}\frac{ydy}{\sqrt{R(y)}}+\int_{\lambda_2}^{y_2}\frac{ydy}{\sqrt{R(y)}}=2C_{21}v'_1+2C_{22}v'_2,\text{ wobei}\end{aligned}\right.$$

$$R(y)=(\lambda_1-y)(\lambda_2-y)(\lambda_3-y)(\lambda_4-y)(\lambda_5-y)(\lambda_6-y),$$

dann haben wir es mit einer quadratischen Transformation zu thun, wenn sich die Theta-Functionen des transformirten Systems als Quotient zweier Ausdrücke 2. Grades in den Theta's des ursprünglichen Systems darstellen lassen. Dann werden die Moduln und Argumente der transformirten Theta's sich in folgender Weise durch die Moduln und Argumente der gegebenen ausdrücken:

---

*) Vergleiche: Koenigsberger, Crelle's Journal, Bd. 67, sowie Pringsheim, mathematische Annalen, Bd. IX. „Zur Transformation 2. Grades u. s. w.“

$$v'_1 = \frac{2\,(\omega_{22}\,v_1 - \omega_{12}\,v_2)}{\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21}}, \qquad v'_2 = \frac{2\,(\omega_{11}\,v_2 - \omega_{21}\,v_1)}{\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21}},$$

$$\tau'_{11} = \frac{\omega'_{11}\,\omega_{22} - \omega'_{21}\,\omega_{12}}{\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21}}, \qquad \tau'_{21} = \frac{\omega'_{12}\,\omega_{22} - \omega'_{22}\,\omega_{12}}{\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21}},$$

$$\tau'_{12} = \frac{\omega'_{21}\,\omega_{11} - \omega'_{11}\,\omega_{21}}{\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21}}, \qquad \tau'_{22} = \frac{\omega'_{22}\,\omega_{11} - \omega'_{12}\,\omega_{21}}{\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21}},$$

wo die Grössen ω, ω' durch die Gleichungen definirt sind:

$$\omega_{11} = \varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}, \qquad \omega_{21} = \varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22},$$
$$\omega_{12} = \varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}, \qquad \omega_{22} = \varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22},$$
$$\omega'_{11} = \varrho'_{11} + \sigma'_{11}\tau_{11} + \sigma'_{21}\tau_{12}, \qquad \omega'_{21} = \varrho'_{21} + \sigma'_{11}\tau_{21} + \sigma'_{21}\tau_{22},$$
$$\omega'_{12} = \varrho'_{12} + \sigma'_{12}\tau_{11} + \sigma'_{22}\tau_{12}, \qquad \omega'_{22} = \varrho'_{22} + \sigma'_{12}\tau_{21} + \sigma'_{22}\tau_{22},$$

während die ϱ, σ, ϱ', σ' ganze Zahlen bedeuten, welche lediglich den folgenden sechs Gleichungen unterworfen sind:

$$\begin{aligned}
\varrho_{11}\varrho'_{21} - \varrho_{21}\varrho'_{11} + \varrho_{12}\varrho'_{22} - \varrho_{22}\varrho'_{12} &= 0,\\
\sigma_{11}\sigma'_{21} - \sigma_{21}\sigma'_{11} + \sigma_{12}\sigma'_{22} - \sigma_{22}\sigma'_{12} &= 0,\\
\varrho_{11}\sigma'_{21} - \sigma_{21}\varrho'_{11} + \varrho_{12}\sigma'_{22} - \sigma_{22}\varrho'_{12} &= 0,\\
\varrho_{21}\sigma'_{11} - \sigma_{11}\varrho'_{21} + \varrho_{22}\sigma'_{12} - \sigma_{12}\varrho'_{22} &= 0,\\
\varrho_{11}\sigma'_{11} - \sigma_{11}\varrho'_{11} + \varrho_{12}\sigma'_{12} - \sigma_{12}\varrho'_{12} &= 2,\\
\varrho_{22}\sigma'_{22} - \sigma_{22}\varrho'_{22} + \varrho_{21}\sigma'_{21} - \sigma_{21}\varrho'_{21} &= 2.
\end{aligned}$$

Fassen wir nun alle quadratischen Transformationen, welche durch lineare Transformationen auseinander hervorgehen, als aequivalent auf, so haben wir noch 15 verschiedene Classen zu unterscheiden. Fügt man die Transformationszahlen in folgendes Schema:

$$\begin{vmatrix}
\sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11}\\
\sigma'_{21} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21}\\
-\varrho'_{21} & -\varrho'_{22} & \varrho_{22} & \varrho_{21}\\
-\varrho'_{11} & -\varrho'_{12} & \varrho_{12} & \varrho_{11}
\end{vmatrix}$$

so characterisirt Hermite jene 15 Classen durch seine 15 Repräsentanten:

A	B	C	D
1 0 0 0	1 0 0 0	2 i o i′	2 0 i i′
0 1 0 0	0 2 i 0	0 1 0 0	0 2 i″ i
0 0 2 0	0 0 1 0	0 0 2 –i	0 0 1 0
0 0 0 2	0 0 0 2	0 0 0 1	0 0 0 1

wo i, i′, i″ alle Combinationen von 0 und 1 bedeuten.

Koenigsberger hat nun nachgewiesen, dass für jeden Repräsentanten die 16 transformirten Thetafunctionen sich entweder als Summe von 4 Quadraten oder als Summe von 2 Producten der ursprünglichen Theta's darstellen lassen. Bezeichnet man nämlich nach Hermite:

$$\begin{aligned} f(v_1 \mid v_2) = &- (\sigma'_{11}v_1 + \sigma'_{21}v_2)(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2) \\ &- (\sigma'_{12}v_1 + \sigma'_{22}v_2)(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2) \\ &+ 2\,\tau'_{12}(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2)(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2) \\ &+ \tau'_{11}(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2)^2 + \tau'_{22}(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2)^2, \end{aligned}$$

so ist:

$$e^{f(v_1 \mid v_2)\cdot \pi i}\, \vartheta_\lambda(v'_1 \mid v'_2) = \Pi_\lambda(v_1 \mid v_2),$$

wobei entweder:

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda(v_1 \mid v_2) = &(\alpha)\,\vartheta_\alpha{}^2(v_1 \mid v_2) + (\beta)\,\vartheta_\beta{}^2(v_1 \mid v_2) + \\ &+ (\gamma)\,\vartheta_\gamma{}^2(v_1 \mid v_2) + (\delta)\,\vartheta_\delta{}^2(v_1 \mid v_2); \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda(v_1 \mid v_2) = &(1)\,\vartheta_\alpha(v_1 \mid v_2)\,\vartheta_\beta(v_1 \mid v_2) + \\ &(2)\,\vartheta_{\alpha\gamma}(v_1 \mid v_2)\,\vartheta_{\beta\gamma}(v_1 \mid v_2). \end{aligned}$$

Dr. Pringsheim *) hat dann für die einzelnen Repräsentanten diejenigen 4 Theta's aufgestellt, welche in die Gestalt von 4 Quadraten gesetzt werden können. In den beiden zuletzt gegebenen Formeln sind die α, β, γ, δ noch ganz beliebig, nur dürfen jene Thetaquadrate keiner linearen Relation genügen. Da nun die Thetafunctionen der letzten

*) Mathematische Annalen Band IX.

Formel ϑ_α, ϑ_β, $\vartheta_{\alpha\gamma}$, $\vartheta_{\beta\gamma}$ immer 4 solche Functionen sind, welche einer Göpel'schen Relation genügen (deren Quadrate also linear unabhängig sind), so können wir die 4 Theta's der ersten Gleichung ϑ_α, ϑ_β, ϑ_γ, ϑ_δ durch diese ersetzen, und wenn wir uns weiter darauf beschränken, nur die geraden Theta's des transformirten Systems darzustellen, so können wir in den obigen Gleichungen als Thetafunctionen diejenigen einer Göpel'schen Relation mit geraden Theta's auswählen. Wir haben dadurch erreicht, dass wir die 10 geraden transformirten Theta's ausdrücken durch dieselben 4 (ebenfalls geraden) Thetafunctionen des ursprünglichen Systems. Nun gibt es aber 15 solche Göpel'sche Relationen zwischen 4 geraden Theta's und ich behaupte, dass man jedem der 15 Repräsentanten eine und nur eine dieser 15 biquadratischen Relationen in der Art zuordnen kann, dass, ihre Theta's in die obigen Gleichungen eingesetzt, die Constanten dieser Gleichungen bis auf Vorzeichen einander gleich werden, so dass sie die Gestalt annehmen:

$$\Pi_\lambda (v_1 \mid v_2) = (\alpha)\,[\vartheta_\alpha{}^2 (v_1 \mid v_2) + \varepsilon\,\vartheta_\beta{}^2 (v_1 \mid v_2) + \varepsilon'\vartheta_\gamma{}^2 (v_1 \mid v_2) + \varepsilon\varepsilon'\vartheta_\delta{}^2 (v_1 \mid v_2)];$$

$$\Pi_\lambda (v_1 \mid v_2) = (1)\,[\vartheta_\alpha (v_1 \mid v_2)\,\vartheta_\beta (v_1 \mid v_2) + \varepsilon\,\vartheta_{\alpha\gamma} (v_1 \mid v_2)\,\vartheta_{\beta\gamma} (v_1 \mid v_2)],$$

wobei

$$\varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1.$$

Es ist dies ein Hauptpunkt für die ganze nachfolgende Betrachtung. Man könnte die Wahrheit dieser Behauptung leicht an den einzelnen Repräsentanten verificiren, ich werde jedoch später andere Repräsentanten aufstellen, welche der ganzen Methode der quadratischen Transformation besser entsprechen, und daselbst auch die zugehörigen 4 Theta's immer beifügen, so dass ich es hier unterlassen will auf diese Untersuchung näher einzugehen. Vielmehr

will ich den Beweis aus dem inneren Wesen der Transformation deduciren. Gerade so wie man bei der quadratischen Transformation der elliptischen Functionen das eine Integralsystem v in ein anderes v' transformirt, indem man das Periodenparallelogramm des gegebenen Systems durch eine Parallele zu einer Seite halbirt und diese Hälfte dem Periodenparallelogramm des neuen Systems entsprechen lässt, gerade ebenso macht man es hier. Dadurch, dass man blos die Hälfte des Parallelogramms auf das Parallelogramm des neuen Systems eindeutig bezieht, erreicht man, dass der ganzen Riemann'schen Fläche des gegebenen Systems die doppelt überdeckte Fläche des neuen Systems entspricht; jedem Werthe z, s der letzteren kommen der doppelten Ueberdeckung entsprechend 2 Werthe der ersteren zu, woraus sich denn weiter folgern lässt, dass die Theta's des neuen Systems zusammengesetzt sind aus Ausdrücken 2 Gr. in den gegebenen Theta's. Bei den hyperelliptischen Functionen erfährt diese ganze Betrachtungsweise eine wesentliche Aenderung, denn hier ist es bekanntlich nicht mehr möglich, sich auf ein einziges Integral zu beschränken, vielmehr fixirt man durch Einführung eines Paares von Integralen $v_1 \mid v_2$ ein Punktepaar der Riemann'schen Fläche, und indem man v_1 und v_2 unabhängig von einander alle complexen Werthe durchlaufen lässt, stellt man jedes Punktepaar dar. Soll nun die zugehörige Riemann'sche Fläche einzweideutig auf eine neue Riemann'sche Fläche bezogen werden, so müssen jedem Punkte eines Paares der ursprünglichen Fläche 2 Punkte auf der neuen Fläche entsprechen, dem Punktepaar als Ganzes aufgefasst also 4 Punktepaare. Nun wird aber ein Punktepaar der ursprünglichen Fläche nach irgend welchen Bewegungen in seine anfängliche Lage zurückgekehrt sein, wenn die Integrale $v'_1 \mid v'_2$ sich um Perioden geändert haben, dann müssen auch die 4 Punktepaare der anderen Fläche nach entsprechen-

den Bewegungen in ihre frühere Lage zurückkehren, aber nur in ihrer Gesammtheit, dagegen können Vertauschungen in den Paaren stattgefunden haben. Bezeichnet man die 4 Paare mit 1, 2, 3, 4, so wird den Vertauschungen von 1 mit 2 und 3 mit 4 oder 1 mit 3 und 2 mit 4 oder endlich 1 mit 4 und 2 mit 3 in dem Integralsystem $v'_1 \mid v'_2$ eine Addition von Perioden entsprechen, es werden also nur noch dem vierten Theil aller möglichen Periodencombinationen des Systems $v'_1 \mid v'_2$ auch Perioden des Systems $v_1 \mid v_2$ entsprechen, nämlich denjenigen Combinationen, welche die Paare 1, 2, 3, 4 unvertauscht lassen. Daraus folgt, dass gewissen Perioden des Systems $v'_1 \mid v'_2$ nur halbe Perioden des Systems $v_1 \mid v_2$ entsprechen, und da eine jede der obigen Vertauschungen durch Zusammensetzen der beiden übrigen erhalten werden kann, so muss die Summe der 3 entsprechenden Periodenhälften mit dem richtigen Vorzeichen versehen Null werden. Nun erhält man aber die sämmtlichen 15 Periodenhälften, indem man die Integrale zwischen den Verzweigungspunkten bildet, und weiter ist bekannt, dass 3 Integrale, welche in den Grenzen die sämmtlichen 6 Verzweigungspunkte aufweisen, gerade die verlangte Eigenschaft besitzen, dass ihre Summe verschwindet. Da man aber 6 Grössen auf 15 verschiedene Weisen in 3 Paare theilen kann, so folgt, dass es 15 quadratische Transformationen gibt, oder richtiger gesagt 15 Classen von Transformationen, weil lineare Transformationen diese Auswahl der 3 Paare nicht berühren. Nach diesen Erläuterungen folgt aber die Richtigkeit der obigen Behauptung von selbst, denn die 4 Theta's einer Göpelschen Relation unterscheiden sich eben um solche 3 Periodenhälften; setzt man also in die Gleichungen für $\Pi\lambda\,(v_1 \mid v_2)$ auf den rechten Seiten die der jedesmaligen quadratischen Transformation entsprechenden Theta's ein, so wird durch Addition jener halben Perioden auf der linken Seite nur

das Vorzeichen geändert*), während auf der rechten Seite sich die Theta's vertauschen, woraus sich die Gleichheit der Constanten ergibt. Bevor wir dazu übergehen einen Fall wirklich auszurechnen und das Formelsystem dafür aufzustellen, wollen wir uns dem zweiten Gegenstand unseres Capitels zuwenden, ich meine die Aufstellung geeigneter Repräsentanten und gleichzeitig eine geeignete Bezeichnungsweise. Die letztere ist durch die obige Bemerkung schon gegeben, wir können die einzelnen Classen fixiren durch das Schema: h i, k l, m n, wenn h, i, k, l, m, n die 6 Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche in irgend welcher Permutation bezeichnen. Als Repräsentanten dieser Classen wählen wir solche Transformationen, welche gerade die 4 Thetafunctionen als Summe von 4 Quadraten erscheinen lassen, die in den zugeordneten Göpelschen Relationen vorkommen Es lassen sich in der That immer und zwar noch in verschiedener Weise solche lineare Transformationen angeben, welche mit den Hermite'schen Repräsentanten zusammengesetzt die verlangten Repräsentanten liefern. Um diese linearen Transformationen zu erhalten, verfährt man nach den von Dr. Pringsheim in der schon citirten Abhandlung angegebenen Methoden; es mag hier genügen, dieselben nur hinzuschreiben. Es kommt das Schema:**)

$$2,34,56,\ \begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&2 \end{vmatrix}\ \&\ \begin{vmatrix} 0&0&0&-1\\ 0&0&+1&0\\ 0&-1&0&0\\ +1&0&0&0 \end{vmatrix}\ \text{gibt}\ \begin{vmatrix} 0&0&0&-1\\ 0&0&2&0\\ 0&-1&0&0\\ 2&0&0&0 \end{vmatrix},\ \vartheta_5,\ \vartheta_{01},\ \vartheta_2,\ \vartheta_{34};$$

*) Es treten freilich auch noch Exponentialgrössen auf, sie sind aber auf beiden Seiten die nämlichen, wie Königsberger gezeigt hat.

**) Man sieht, dass die linearen Transformationen dadurch aus den quadratischen entstanden sind, dass man die 2 in (— 1) verwandelte und die Ordnung der Horizontalreihen umkehrte.

12, 35, 46, $\begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 0&2&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&2 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&-1\\ 0&0&+1&0\\ 0&-1&1&0\\ +1&0&0&0 \end{vmatrix}$, $\vartheta_4, \vartheta_{23}, \vartheta_2, \vartheta_{34}$;

12, 36, 45 $\begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&-1\\ 0&0&-1&0\\ 0&+1&0&0\\ +1&0&0&0 \end{vmatrix}$, $\vartheta_4, \vartheta_{23}, \vartheta_5, \vartheta_{01}$;

13, 24, 56 $\begin{vmatrix} 2&0&0&1\\ 0&2&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&+1\\ 0&0&+1&0\\ 0&-1&0&0\\ -1&0&0&1 \end{vmatrix}$, $\vartheta_{01}, \vartheta_{12}, \vartheta_0, \vartheta_2$;

13, 25, 46 $\begin{vmatrix} 2&0&0&1\\ 0&2&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&+1\\ 0&0&+1&0\\ 0&-1&1&0\\ -1&0&0&1 \end{vmatrix}$, $\vartheta_{03}, \vartheta_{23}, \vartheta_0, \vartheta_2$;

13, 26, 45 $\begin{vmatrix} 2&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&+1\\ 0&0&-1&0\\ 0&+1&0&0\\ -1&0&0&1 \end{vmatrix}$, $\vartheta_{03}, \vartheta_{23}, \vartheta_{01}, \vartheta_{12}$;

14, 23, 56 $\begin{vmatrix} 2&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&+1\\ 0&0&+1&0\\ 0&-1&0&0\\ -1&0&0&0 \end{vmatrix}$, $\vartheta_5, \vartheta_{12}, \vartheta_0, \vartheta_{34}$;

14, 25, 36 $\begin{vmatrix} 2&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&-1\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&+1\\ 0&0&-1&-1\\ 0&+1&0&0\\ -1&1&0&0 \end{vmatrix}$, $\vartheta_5, \vartheta_{14}, \vartheta_0, \vartheta_{23}$;

14, 26, 35 $\begin{vmatrix} 2&0&1&1\\ 0&2&1&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&+1\\ 0&0&+1&0\\ 0&-1&1&1\\ -1&0&1&1 \end{vmatrix}$, $\vartheta_{12}, \vartheta_{14}, \vartheta_{34}, \vartheta_{23}$;

15, 23, 46 $\begin{vmatrix} 2&0&0&0\\ 0&2&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}$ & $\begin{vmatrix} 0&0&0&+1\\ 0&0&+1&0\\ 0&-1&1&0\\ -1&0&0&0 \end{vmatrix}$, $\vartheta_{34}, \vartheta_0, \vartheta_{03}, \vartheta_4$;

15, 24, 36 $\left|\begin{matrix} 2&1&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2&-1 \\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right|$ & $\left|\begin{matrix} 0&0&0&+1 \\ 0&0&-1&-1 \\ +1&0&0&0 \\ -1&1&0&1 \end{matrix}\right|$, $\vartheta_{01}, \vartheta_0, \vartheta_{14}, \vartheta_4$;

15, 26, 34 $\left|\begin{matrix} 2&0&1&1 \\ 0&2&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right|$ & $\left|\begin{matrix} 0&0&0&+1 \\ 0&0&+1&0 \\ 0&-1&0&1 \\ -1&0&1&1 \end{matrix}\right|$, $\vartheta_{01}, \vartheta_{34}, \vartheta_{14}, \vartheta_{03}$;

16, 23, 45 $\left|\begin{matrix} 2&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right|$ & $\left|\begin{matrix} 0&0&0&+1 \\ 0&0&-1&0 \\ +1&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{matrix}\right|$, $\vartheta_5, \vartheta_{12}, \vartheta_{03}, \vartheta_4$;

16, 24, 35 $\left|\begin{matrix} 2&0&1&0 \\ 0&2&1&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right|$ & $\left|\begin{matrix} 0&0&0&+1 \\ 0&0&+1&0 \\ 0&-1&1&1 \\ -1&0&1&0 \end{matrix}\right|$, $\vartheta_{14}, \vartheta_{12}, \vartheta_2, \vartheta_4$;

16, 25, 34 $\left|\begin{matrix} 2&0&1&0 \\ 0&2&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right|$ & $\left|\begin{matrix} 0&0&0&+1 \\ 0&0&+1&0 \\ 0&-1&0&1 \\ -1&0&1&0 \end{matrix}\right|$, $\vartheta_{14}, \vartheta_5, \vartheta_2, \vartheta_{03}$;

Die beigefügten 4 Theta's haben eine doppelte Bedeutung; einerseits lassen sich die 10 geraden Theta's des transformirten System's durch solche 4 Theta's des gegebenen Systems darstellen, andrerseits sind es eben dieselben 4 Theta's des transformirten Systems, welche als Summe von 4 Quadraten erscheinen. Gehen wir jetzt dazu über für einen Fall, und zwar den Fall: 12, 34, 56, das betreffende Formelsystem wirklich aufzustellen. Er ist bestimmt durch das Schema: $\left|\begin{matrix} 0&0&0&-1 \\ 0&0&2&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 2&0&0&0 \end{matrix}\right|$, daraus folgt:

$$v'_1 = \frac{2(\tau_{12}v_2 - \tau_{22}v_1)}{\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}}; \quad \tau'_{11} = \frac{2\tau_{22}}{\tau^2_{12} - \tau_{11}\tau_{22}}; \quad \tau'_{22} = \frac{\frac{\tau_{11}}{2}}{\tau^2_{12} - \tau_{11}\tau_{22}}.$$

$$v'_2 = \frac{\tau_{11}v_2 - \tau_{12}v_1}{\tau^2_{12} - \tau_{11}\tau_{22}}; \quad \tau'_{12} = \frac{\tau_{12}}{\tau^2_{12} - \tau_{11}\tau_{22}};$$

Hieraus ergibt sich, dass den Zuwachsen:

$\tau'_{11} \mid \tau'_{12}$ $\tau'_{12} \mid \tau'_{22}$ $0 \mid 1$ $1 \mid 0$ der Integrale $v'_1 \mid v'_2$ die Zuwachse

$-1 \mid 0$ $0 \mid \frac{1}{2}$ $-\tau_{12} \mid -\tau_{22}$ $\frac{\tau_{11}}{2} \mid \frac{\tau_{12}}{2}$ der Integrale $v_1 \mid v_2$ entsprechen. Weiter wissen wir, welche unter den geraden Theta's sich durch Quadrate und welche sich durch doppelte Produkte darstellen lassen; wir können desshalb die Gleichungen leicht angeben, indem wir die Constanten dadurch bestimmen, dass wir den Integralen $v_1 \mid v_2$ die halben Perioden $0 \mid \frac{1}{2}$, $\frac{\tau_{11}}{2} \mid \frac{\tau_{12}}{2}$ und $\frac{\tau_{11}}{2} \mid \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2}$ hinzufügen, was bei den Integralen $v'_1 \mid v'_2$ eine Aenderung um ganze Perioden nach sich zieht. Um in den letzten 6 Gleichungen die beiden Produkte richtig aufzufinden, schreibt man zunächst alle 6 Produkte mit unbestimmten Coëfficienten hin, dann wird eine Vermehrung der Argumente $v_1 \mid v_2$ um $1 \mid 0$, $\tau_{11} \mid \tau_{12}$ oder $\tau_{11} + 1 \mid \tau_{12}$ vier Coëfficienten als 0 erscheinen lassen. Wir erhalten so zunächst die folgenden 10 Gleichungen:

$$C \cdot \frac{\vartheta'_5}{c'_5} = \frac{\vartheta^2_5 + \vartheta^2_{01} + \vartheta^2_2 + \vartheta^2_{34}}{c^2_5 + c^2_{01} + c^2_2 + c^2_{34}};$$

$$C \cdot \frac{\vartheta'_{01}}{c'_{01}} = \frac{\vartheta^2_5 - \vartheta^2_{01} - \vartheta^2_2 + \vartheta^2_{34}}{c^2_5 - c^2_{01} - c^2_2 + c^2_{34}};$$

$$C \cdot \frac{\vartheta'_2}{c'_2} = \frac{\vartheta^2_5 - \vartheta^2_{01} + \vartheta^2_2 - \vartheta^2_{34}}{c^2_5 - c^2_{01} + c^2_2 - c^2_{34}};$$

$$C \cdot \frac{\vartheta'_{34}}{c'_{34}} = \frac{\vartheta^2_5 + \vartheta^2_{01} - \vartheta^2_2 - \vartheta^2_{34}}{c^2_5 + c^2_{01} - c^2_2 - c^2_{34}};$$

$$C = e^{f(v_1 \mid v_2) \cdot \pi i};$$

$$C.\frac{\vartheta'_{12}}{c'_{12}}=\frac{2(\vartheta_5\vartheta_{01}+\vartheta_2\vartheta_{34})}{2(c_5c_{01}+c_2c_{34})};\quad C.\frac{\vartheta'_{0}}{c'_{0}}=\frac{2(\vartheta_5\vartheta_{01}-\vartheta_2\vartheta_{34})}{2(c_5c_{01}-c_2c_{34})};$$

$$C.\frac{\vartheta'_{4}}{c'_{4}}=\frac{2(\vartheta_5\vartheta_{34}+\vartheta_2\vartheta_{01})}{2(c_5c_{34}+c_2c_{01})};\quad C.\frac{\vartheta'_{23}}{c'_{23}}=\frac{2(\vartheta_5\vartheta_{34}-\vartheta_2\vartheta_{01})}{2(c_5c_{34}-c_2c_{01})};$$

$$C.\frac{\vartheta'_{03}}{c'_{03}}=\frac{2(\vartheta_5\vartheta_{2}+\vartheta_{01}\vartheta_{34})}{2(c_5c_{2}+c_{01}c_{34})};\quad C.\frac{\vartheta'_{14}}{c'_{14}}=\frac{2(\vartheta_5\vartheta_{2}-\vartheta_{01}\vartheta_{34})}{2(c_5c_{2}-c_{01}c_{34})}.$$

Hierbei ist: $\vartheta' = \vartheta(v'_1 \mid v'_2)$, $\vartheta = \vartheta(v_1 \mid v_2)$, während die Constanten c' und c die Nullwerthe von ϑ' resp. ϑ bezeichnen.

Aus diesen 10 Gleichungen lassen sich noch eine Menge anderer herleiten, entweder dadurch, dass man $v_1 \mid v_2$ um solche halbe Perioden ändert, welche auch auf der linken Seite bei $v'_1 v'_2$ einen Zuwachs um halbe Perioden bedingen, oder auch dadurch, dass man auf der rechten Seite an Stelle der 4 Functionen ϑ_5, ϑ_{01}, ϑ_2, ϑ_{34}, solche einführt, die sich aus denselben durch Addition von Periodenhälften ergeben. Einerseits ist es nicht uninteressant, ein solches Formelsystem kennen zu lernen, andrerseits wird es uns mehrere Relationen zwischen den Constanten ergeben, welche es gestatten, jene 10 Theta's einfacher auszudrücken, und desshalb mögen diese abgeleiteten Gleichungen zum Theil hier folgen:

$$C.\frac{\vartheta'_{5}}{c'_{5}}=\frac{\vartheta^2_4+\vartheta^2_{23}+\vartheta^2_{24}+\vartheta^2_3}{c^2_4+c^2_{23}}=\frac{\vartheta^2_{12}-\vartheta^2_{02}-\vartheta^2_1+\vartheta^2_0}{c^2_{12}+c^2_0},$$

$$C.\frac{\vartheta'_{01}}{c'_{01}}=\frac{\vartheta^2_4-\vartheta^2_{23}-\vartheta^2_{24}+\vartheta^2_3}{c^2_4-c^2_{23}}=\frac{\vartheta^2_{12}+\vartheta^2_{02}+\vartheta^2_1+\vartheta^2_0}{c^2_{12}+c^2_0},$$

$$C.\frac{\vartheta'_{2}}{c'_{2}}=\frac{\vartheta^2_4-\vartheta^2_{23}+\vartheta^2_{24}-\vartheta^2_3}{c^2_4-c^2_{23}}=\frac{\vartheta^2_{12}+\vartheta^2_{02}-\vartheta^2_1-\vartheta^2_0}{c^2_{12}-c^2_0},$$

$$C.\frac{\vartheta'_{34}}{c'_{34}}=\frac{\vartheta^2_4+\vartheta^2_{23}-\vartheta^2_{24}-\vartheta^2_3}{c^2_4+c^2_{23}}=\frac{\vartheta^2_{12}-\vartheta^2_{02}+\vartheta^2_1-\vartheta^2_0}{c^2_{12}-c^2_0},$$

$$*C.\ \frac{\vartheta'_{34}}{c'_5} = \frac{\vartheta^2_4 + \vartheta^2_{23} - \vartheta^2_{24} - \vartheta^2_3}{c^2_5 + c^2_{01} + c^2_2 + c^2_{34}},\quad C.\ \frac{\vartheta'_{01}}{c'_5} = \frac{\vartheta^2_{12} + \vartheta^2_{02} + \vartheta^2_1 + \vartheta^2_0}{c^2_5 + c^2_{01} + c^2_2 + c^2_{34}},$$

$$*C.\ \frac{\vartheta'_2}{c'_{01}} = \frac{\vartheta^2_4 - \vartheta^2_{23} + \vartheta^2_{24} - \vartheta^2_3}{c^2_5 - c^2_{01} - c^2_2 + c^2_{34}},\quad C.\ \frac{\vartheta'_5}{c'_{01}} = \frac{\vartheta^2_{12} - \vartheta^2_{02} - \vartheta^2_1 + \vartheta^2_0}{c^2_5 - c^2_{01} - c^2_2 + c^2_{34}},$$

$$*C.\ \frac{\vartheta'_{01}}{c'_2} = \frac{\vartheta^2_4 - \vartheta^2_{23} - \vartheta^2_{24} + \vartheta^2_3}{c^2_5 - c^2_{01} + c^2_2 - c^2_{34}},\quad C.\ \frac{\vartheta'_{34}}{c'_2} = \frac{\vartheta^2_{12} - \vartheta^2_{02} + \vartheta^2_1 - \vartheta^2_0}{c^2_5 - c^2_{01} + c^2_2 - c^2_{34}},$$

$$*C.\ \frac{\vartheta'_5}{c'_{34}} = \frac{\vartheta^2_4 + \vartheta^2_{23} + \vartheta^2_{24} + \vartheta^2_3}{c^2_5 + c^2_{01} - c^2_2 - c^2_{34}},\quad C.\ \frac{\vartheta'_2}{c'_{34}} = \frac{\vartheta^2_{12} + \vartheta^2_{02} - \vartheta^2_1 - \vartheta^2_0}{c^2_5 + c^2_{01} - c^2_2 - c^2_{34}},$$

Aus diesen Gleichungen folgt direkt eine Relation zwischen den Nullwerthen der beiderseitigen Thetafunctionen, nämlich:

$$c'^2_5 : c'^2_{01} : c'^2_2 : c'^2_{34} = (c^2_5 + c^2_{01} + c^2_2 + c^2_{34}) : (c^2_5 - c^2_{01} - c^2_2 + c^2_{34}) : (c^2_5 - c^2_{01} + c^2_2 - c^2_{34}) : (c^2_5 + c^2_{01} - c^2_2 - c^2_{34}).$$

Leitet man aus der 5. und 6. Gleichung des ersten Systems ebenfalls 2 neue Gleichungen her, nämlich:

$$C.\ \frac{\vartheta'_0}{c'_{12}} = \frac{\vartheta_4\vartheta_{23} - \vartheta_3\vartheta_{24}}{c_5 c_{01} + c_2 c_{34}};\quad C.\ \frac{\vartheta'_{12}}{c'_0} = \frac{\vartheta_4\vartheta_{23} + \vartheta_3\vartheta_{24}}{c_5 c_{01} - c_2 c_{34}};$$

und setzt die Argumente der Theta's in den Zählern = o, so kommt:

$$c'^2_{12} : c'^2_0 = 2\,(c_5\,c_{01} + c_2\,c_{34}) : 2\,(c_5\,c_{01} - c_2\,c_{34}).$$

In gleicher Weise folgen aus 7 & 8 resp. 9 & 10 die beiden Gleichungen:

---

* Diese 4 Gleichungen werden durch Vergrösserung von $v_1 \mid v_2$ um $\frac{\tau_{12}}{2} \mid \frac{\tau_{22}}{2}$ aus den 4 ersten Gleichungen des vorigen Systems erhalten, wodurch die Integrale $v'_1 \mid v'_2$ gleichzeitig um o $\mid -\frac{1}{2}$ wachsen; die Grösse C ist dabei dieselbe geblieben, indem auch hier die Exponentialgrössen auf beiden Seiten sich gegenseitig zerstören.

$$c'^2_4 : c'^2_{23} = 2(c_5c_{34} + c_2c_{01}) : 2(c_5c_{34} - c_2c_{01}),$$
$$c'^2_{03} : c'^2_{14} = 2(c_5c_2 + c_{01}c_{34}) : 2(c_{01}c_{34} - c_5c_2).$$

Um schliesslich diese letzten 6 Nullwerthe c'_{12}, c'_0, c'_4, c'_{23}, c'_{03}, c'_{14} in eine Beziehung zu den 4 ersten c'_5, c'_{01}, c'_2, c'_{34} zu bringen benützen wir die bekannten Relationen, welche sich übrigens auch aus den obigen Gleichungen sofort ergeben:

$$c'^2_4 c'^2_{23} = c'^2_5 c'^2_{01} - c'^2_2 c'^2_{34},$$
$$c'^2_{12} c'^2_0 = c'^2_5 c'^2_{34} - c'^2_{01} c'^2_2;$$
$$-c'^2_{03} \cdot c'^2_{14} = c'^2_5 c'^2_2 - c'^2_{01} c'^2_{34};\ ^*)$$

Setzen wir in diese 3 Gleichungen die Werthe:

$$\varrho \cdot c'^2_5 = c^2_5 + c^2_{01} + c^2_2 + c^2_{34}, \quad \varrho \cdot c'^2_2 = c^2_5 - c^2_{01} + c^2_2 - c^2_{34},$$
$$\varrho \cdot c'^2_{01} = c^2_5 - c^2_{01} - c^2_2 + c^2_{34}, \quad \varrho \cdot c'^2_{34} = c^2_5 + c^2_{01} - c^2_2 - c^2_{34},$$

ein, so erhalten wir:

$$c'^2_4 \cdot c'^2_{23} = \varrho^2 \cdot 2(c_5c_{34} + c_2c_{01})\, 2(c_5c_{34} - c_2c_{01});$$
$$c'^2_{12} \cdot c'^2_0 = \varrho^2 \cdot 2(c_5c_{01} + c_2c_{34}) \cdot 2(c_5c_{01} - c_2c_{34});$$
$$-c'^2_{03} \cdot c'^2_{14} = \varrho^2 \cdot 2(c_5c_2 + c_{01}c_{34}) \cdot 2(c_5c_2 - c_{01}c_{34});$$

was zusammen mit den Gleichungen für die Quotienten $c'^2_4 : c'^2_{23}$, $c'^2_{12} : c'^2_0$, und $c'^2_{03} : c'^2_{14}$ die 6 Relationen ergibt:

$$\varrho \cdot c'^2_{12} = 2(c_5c_{01} + c_2c_{34}), \quad \varrho \cdot c'^2_0 = 2(c_5c_{01} - c_2c_{34});$$
$$\varrho \cdot c'^2_4 = 2(c_5c_{34} + c_2c_{01}), \quad \varrho \cdot c'^2_{23} = 2(c_5c_{34} - c_2c_{01});$$
$$\varrho \cdot c'^2_{03} = 2(c_5c_2 + c_{01}c_{34}), \quad \varrho \cdot c'^2_{14} = 2(c_5c_2 - c_{01}c_{34}).$$

Beschränken wir uns also darauf, die Verhältnisse der 10 geraden Thetafunctionen anzugeben, so können wir sie jetzt in der einfachen Gestalt schreiben:

---

*) Vergleiche: Göpel, Theoriae transcendentium Abelianarum etc. Crelle Bd. 35. Rosenhain, Memoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes mém. des savants étrangers 1851.

$$c'_5\vartheta'_5 : c'_{01}\vartheta'_{01} : c'_2\vartheta'_2 : c'_{34}\vartheta'_{34} : c'_{12}\vartheta'_{12} : c'_0\vartheta'_0 : c'_4\vartheta'_4 :$$
$$: c'_{23}\vartheta'_{23} : c'_{03}\vartheta'_{03} : c'_{14}\vartheta'_{14}$$
$$= \vartheta^2_5 + \vartheta^2_{01} + \vartheta^2_2 + \vartheta^2_{34} : \vartheta^2_5 - \vartheta^2_{01} - \vartheta^2_2 + \vartheta^2_{34} :$$
$$\vartheta^2_5 - \vartheta^2_{01} + \vartheta^2_2 - \vartheta^2_{34} : \vartheta^2_5 + \vartheta^2_{01} - \vartheta^2_2 - \vartheta^2_{34} :$$
$$2(\vartheta_5\vartheta_{01} + \vartheta_2\vartheta_{34}) : 2(\vartheta_5\vartheta_{01} - \vartheta_2\vartheta_{34}) :$$
$$2(\vartheta_5\vartheta_{34} + \vartheta_2\vartheta_{01}) : 2(\vartheta_5\vartheta_{34} - \vartheta_2\vartheta_{01}) :$$
$$2(\vartheta_5\vartheta_2 + \vartheta_{01}\vartheta_{34}) : 2(\vartheta_5\vartheta_2 - \vartheta_{01}\vartheta_{34}).$$

Auch die Darstellung der 16 nicht accentuirten Theta's durch die 4 Functionen ϑ'_5, ϑ'_{01}, ϑ'_2, ϑ'_{34} und ihre Nullwerthe ist leicht auszuführen, wobei denn immer der Factor $\frac{\varrho \cdot C}{4}$ auftritt; begnügt man sich auch hier wieder mit den Verhältnissen dieser Theta's, so folgt das Gleichungssystem, dessen Richtigkeit man sofort erkennt:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot \vartheta^2_5 &= c'_5\vartheta'_5 + c'_{01}\vartheta'_{01} + c'_2\vartheta'_2 + c'_{34}\vartheta'_{34},\\
\varrho \cdot \vartheta^2_{01} &= c'_5\vartheta'_5 - c'_{01}\vartheta'_{01} - c'_2\vartheta'_2 + c'_{34}\vartheta'_{34},\\
\varrho \cdot \vartheta^2_2 &= c'_5\vartheta'_5 - c'_{01}\vartheta'_{01} + c'_2\vartheta'_2 - c'_{34}\vartheta'_{34},\\
\varrho \cdot \vartheta^2_{34} &= c'_5\vartheta'_5 + c'_{01}\vartheta'_{01} - c'_2\vartheta'_2 - c'_{34}\vartheta'_{34},\\
\varrho \cdot \vartheta^2_{12} &= c'_5\vartheta'_{01} + c'_{01}\vartheta'_5 + c'_2\vartheta'_{34} + c'_{34}\vartheta'_2,\\
\varrho \cdot \vartheta^2_{02} &= c'_5\vartheta'_{01} - c'_{01}\vartheta'_5 - c'_2\vartheta'_{34} + c'_{34}\vartheta'_2,\\
\varrho \cdot \vartheta^2_1 &= c'_5\vartheta'_{01} - c'_{01}\vartheta'_5 + c'_2\vartheta'_{34} - c'_{34}\vartheta'_2,\\
\varrho \cdot \vartheta^2_0 &= c'_5\vartheta'_{01} + c'_{01}\vartheta'_5 - c'_2\vartheta'_{34} - c'_{34}\vartheta'_2,\\
\varrho \cdot \vartheta^2_4 &= c'_5\vartheta'_{34} + c'_{01}\vartheta'_2 + c'_2\vartheta'_{01} + c'_{34}\vartheta'_5,\\
\varrho \cdot \vartheta^2_{23} &= c'_5\vartheta'_{34} - c'_{01}\vartheta'_2 - c'_2\vartheta'_{01} + c'_{34}\vartheta'_5,\\
-\varrho \cdot \vartheta^2_{24} &= c'_5\vartheta'_{34} - c'_{01}\vartheta'_2 + c'_2\vartheta'_{01} - c'_{34}\vartheta'_5,\\
-\varrho \cdot \vartheta^2_3 &= c'_5\vartheta'_{34} + c'_{01}\vartheta'_2 - c'_2\vartheta'_{01} - c'_{34}\vartheta'_5,\\
\varrho \cdot \vartheta^2_{03} &= c'_5\vartheta'_2 + c'_{01}\vartheta'_{34} + c'_2\vartheta'_5 + c'_{34}\vartheta'_{01},\\
\varrho \cdot \vartheta^2_{13} &= c'_5\vartheta'_2 - c'_{01}\vartheta'_{34} - c'_2\vartheta'_5 + c'_{34}\vartheta'_{01},\\
-\varrho \cdot \vartheta^2_{14} &= c'_5\vartheta'_2 - c'_{01}\vartheta'_{34} + c'_2\vartheta'_5 - c'_{34}\vartheta'_{01},\\
-\varrho \cdot \vartheta^2_{04} &= c'_5\vartheta'_2 + c'_{01}\vartheta'_{34} - c'_2\vartheta'_5 - c'_{34}\vartheta'_{01}.
\end{aligned}$$

Der vorliegende Fall lässt die Wechselbeziehungen zwischen den Theta's zweier Integralsysteme, wenn das eine aus dem anderen durch quadratische Transformation abgeleitet ist, deutlich erkennen; ganz analoge Beziehungen erhalten wir für eine beliebige Transformation 2. Grades, indem eine beliebige lineare Transformation die gestrichenen Theta's vertauscht und zwar die geraden unter einander und ebenso die ungeraden, während der Uebergang zu einer anderen Classe von quadratischen Transformationen eine Vertauschung der ungestrichenen Theta's zur Folge hat, ebenfalls gerade mit geraden und ungerade mit ungeraden.

§ 3. Bedeutung der quadratischen Transformation für die Kummer'sche Fläche und Zusammenhang der Borchardt'schen Darstellung mit der von mir gegebenen.

Als Ausgangspunkt für die Betrachtungen dieses Paragraphen sollen einestheils die 6 in Involution liegenden linearen Complexe, anderntheils eines der 15 Fundamentaltetraëder, etwa das Tetraëder 12, 34, 56, genommen werden. Auf die 6 Fundamentalcomplexe hatten wir ein confocales Complexsystem 2. Grades bezogen:

$$\frac{x^2_1}{k_1-\lambda}+\frac{x^2_2}{k_2-\lambda}+\frac{x^2_3}{k_3-\lambda}+\frac{x^2_4}{k_4-\lambda}+\frac{x^2_5}{k_5-\lambda}+\frac{x^2_6}{k_6-\lambda}=0;$$

wobei:

$$x^2_1+x^2_2+x^2_3+x^2_4+x^2_5+x^2_6=0,$$

und die Kummersche Fläche als Singularitätenfläche dieses Systems definirt, wir wollen jetzt dieselbe Kummer'sche Fläche auf das Tetraëder 12, 34, 56 beziehen und nehmen an, dass ihre Gleichung die im ersten Paragraphen dieses Abschnitts gegebene Gestalt besitze. Dann können wir die näheren Beziehungen zwischen den Constanten k_1, k_2 .... k_6 und den Coordinaten eines Knotenpunktes darstellen. Die Gleichungen der 6 Complexe in Involution sind:

$$x_1 = p_{12} + p_{34} = x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2 - w_1 z_2;$$

$$x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}) = \frac{1}{i}(x_1 y_2 - y_1 x_2 - z_1 w_2 + w_1 z_2);$$

$$x_3 = p_{13} + p_{12} = x_1 z_2 - z_1 x_2 + w_1 y_2 - y_1 w_2;$$

$$x_4 = \frac{1}{i}(p_{13} - p_{42}) = \frac{1}{i}(x_1 z_2 - z_1 x_2 - w_1 y_2 + y_1 w_2);$$

$$x_5 = p_{14} + p_{23} = x_1 w_2 - w_1 x_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2;$$

$$x_6 = \frac{1}{i}(p_{14} - p_{23}) = \frac{1}{i}(x_1 w_2 - w_1 x_2 - y_1 z_2 + z_1 y_2).$$

Einem Punkte: x, y, z, w entspricht

durch die Congruenz (12) . . . . x, y, —z, —w,
durch die Congruenz (13) . . . . w, z, —y, —x,
durch die Congruenz (14) . . . . w, — z, —y, x,
durch die Congruenz (15) . . . . z, —w, —x, y,
durch die Congruenz (16) . . . . z, w, x, y.

Diese 6 Punkte liegen in einer Ebene und zwar auf einem Kegelschnitte, wir können ihre Doppelverhältnisse bestimmen, und diese müssen dann übereinstimmen mit den entsprechenden Doppelverhältnissen der Grössen: k_1, k_2 k_3 . . . . k_6, wenn der Punkt x y z w zu einem Knotenpunkte x_0 y_0 z_0 w_0 wird. Um die Doppelverhältnisse der 6 Knotenpunkte zu bestimmen, wird man sie von einem Eckpunkte des Tetraëders 12, 34, 56 auf die gegenüberliegende Seite und dann von einem dieser Projectionspunkte auf eine Kante dieser Seitenfläche projiciren, wodurch ja die Doppelverhältnisse nicht geändert werden. Auf diese Weise ergeben sich die Werthe:

$$\frac{k_2 - k_6}{k_3 - k_6} \cdot \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{2(x_0 y_0 + z_0 w_0)}{2(x_0 w_0 + z_0 y_0)} \cdot \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2}{2(x_0 z_0 + y_0 w_0)};$$

$$\frac{k_2 - k_6}{k_4 - k_6} \cdot \frac{k_4 - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{x_0^2 + z_0^2 - y_0^2 - w_0^2}{2(x_0 z_0 - y_0 w_0)} \cdot \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2}{2(x_0 z_0 + y_0 w_0)};$$

$$\frac{k_2 - k_6}{k_5 - k_6} \cdot \frac{k_5 - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{2(x_0 y_0 + z_0 w_0)}{2 x_0 w_0 + y_0 z_0)} \cdot \frac{x_0^2 + z_0^2 - y_0^2 - w_0^2}{2(x_0 z_0 - y_0 w_0)};$$

woraus alle übrigen Doppelverhältnisse zusammengesetzt werden können. Bildet man diese Doppelverhältnisse wirklich, so kann man die Constanten $x_0\ y_0\ z_0\ w_0$ oder vielmehr die aus denselben zusammengesetzten Ansdrücke in der Gleichung der Kummer'schen Fläche durch sie ersetzen und gelangt dann zu einer Gleichung in $k_1, k_2 \ldots k_6$, die ich doch hier anführen will:

$$\left\{\begin{array}{c} x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + \\ 4\,\dfrac{k_1k_2(k_3+k_4-k_5-k_6)+k_3k_4(k_5+k_6-k_1-k_2)+k_5k_6(k_1+k_2-k_3-k_4)}{(k_1-k_2)(k_3-k_4)(k_5-k_6)}\,x\,y\,z\,w \\ -\ 2\,\dfrac{(k_3-k_5)(k_4-k_6)+(k_3-k_6)(k_4-k_5)}{(k_3-k_4)(k_5-k_6)}\,(x^2y^2-z^2w^2) \\ -\ 2\,\dfrac{(k_5-k_1)(k_6-k_2)+(k_5-k_2)(k_6-k_1)}{(k_5-k_6)(k_1-k_2)}\,(x^2z^2-y^2w^2) \\ -\ 2\,\dfrac{(k_1-k_3)(k_2-k_4)+(k_1-k_4)(k_2-k_3)}{(k_1-k_2)(k_3-k_4)}\,(x^2w^2-y^2z^2). \end{array}\right\} = 0$$

Schliesslich können wir noch die Gleichungen der 10 Fundamentalflächen 2. Grades auf unser Coordinatentetraëder bezogen, angeben:

123,456 . . . . $2\,(x\,z - y\,w) = 0$
124,356 . . . . $2\,(x\,z + y\,w) = 0$
126,345 . . . . $2\,(x\,w - y\,z) = 0$
125,346 . . . . $2\,(x\,w + y\,z) = 0$
156,234 . . . . $2\,(x\,y - z\,w) = 0$
134,256 . . . . $2\,(x\,y + z\,w) = 0$
135,246 . . . . $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$
136,245 . . . . $x^2 - y^2 - z^2 + w^2 = 0$
145,236 . . . . $x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 0$
146,235 . . . . $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$

Wir wenden uns nun zu den beiden Parametervertheilungen auf der Kummerschen Fläche, und werden uns dabei sogleich überzeugen, welche Rolle diese soeben gegebenen Entwicklungen spielen. Eine Parameterdarstellung nach Borchardt erhalten wir z. B, indem wir: $x = \vartheta_5$, $y = \vartheta_{34}$, $z = \vartheta_2$, $w = \vartheta_{01}$ setzen, indem dann die Gleichung der Kummerschen Fläche in eine Göpel'sche Relation übergeht. Sehen wir nun zu, welche Werthe den 15 Punkten zukommen, welche aus einem beliebigen Punkte ϑ_5, ϑ_{34}, ϑ_2, ϑ_{01} durch Spiegelung an den 15 Congruenzen hervorgehen, so finden wir leicht (vermittelst der Tabelle auf der vorhergehenden Seite, welche die einem Punkte x y z w durch die Congruenzen (12), (13), (14), (15), (16) entsprechenden Punkte angibt), dass durch Spiegelung

an (12) . . $v_1 | v_2$ übergeht in: $v_1 + 1 | v_2$,

„ (13) . . $v_1 | v_2$ „ „ $v_1 + \frac{\tau_{11}}{2} + 1 | v_2 + \frac{\tau_{12}}{2}$,

„ (14) . . $v_1 | v_2$ „ „ $v_1 + \frac{\tau_{11}}{2} + \tau_{12} | v_2 + \frac{\tau_{12}}{2} + \tau_{22}$,

„ (15) . . $v_1 | v_2$ „ „ $v_1 + \frac{\tau_{11}}{2} + \tau_{12} | v_2 + \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2} + \tau_{22}$,

„ (16) . . $v_1 | v_2$ „ „ $v_1 + \frac{\tau_{11}}{2} | v_2 + \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2}$,

und alle übrigen Spiegelungen lassen sich aus diesen zusammensetzen. Wenden wir auf dieses Integralsystem $v_1 | v_2$ die zu Ende des vorigen Paragraphen angegebene quadratische Transformation an, so wird aus:

$v_1 | v_2$ das neue Parameterpaar $v'_1 | v'_2$,

$v_1 + 1 | v_2$ . . . . . $v'_1 + \tau'_{11} | v'_2 + \tau'_{12}$,

$v_1 + \frac{\tau_{11}}{2} + 1 | v_2 + \frac{\tau_{12}}{2}$ . . . . $v'_1 + \tau'_{11} + 1 | v'_2 + \tau'_{12}$,

$v_1 + \frac{\tau_{11}}{2} + \tau_{12} | v_2 + \frac{\tau_{12}}{2} + \tau_{22}$. $v'_1 + 1 | v'_2 + 1$,

$v_1 + \frac{\tau_{11}}{2} + \tau_{12} | v_2 + \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2} + \tau_{22}$. $v'_1 + \tau'_{12} + 1 | v'_2 + \tau'_{22} + 1$,

$v_1 + \frac{\tau_{11}}{2} | v_2 + \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{1}{2}$ . . . $v'_1 + \tau'_{12} + 1 | v'_2 + \tau'_{22}$.

Diese neue Parametervertheilung stimmt aber vollkommen mit der von mir im zweiten Abschnitte gegebenen überein, wo ja auch aus einem Punkte $v'_1 \mid v'_2$ dieselben 5 hier angegebenen Punkte durch Spiegelung an (12), (13), (14), (15), (16) hervorgehen, man sieht also, dass dieselbe aus der Vertheilung von Borchardt hervorgeht durch quadratische Transformation. Dass dem wirklich so ist, konnte man schon daraus schliessen, dass die Punktepaare der zugehörigen Riemann'schen Fläche, welche ja durch die Punkte der Kummerschen Fläche repräsentirt werden, ein-vier-deutig auf einander bezogen sind. Bezieht man nämlich die beiden Integralsysteme $v_1 \mid v_2$ und $v'_1 \mid v'_2$ auf 2 Kummersche Flächen F und F', und zwar beide Male in demselben Sinne (ich meine in dem Borchardt'schen oder in dem meinigen), so entsprechen einem Punkte auf F' immer 4 Punkte auf F, dagegen entspricht einem Punkt auf F nur ein Punkt auf F'. Ueberdeckt man die ganze Fläche F' mit Parametern, so überdecken die entsprechenden Parameter die Fläche F nur zum vierten Theile, während eine ganze Ueberdeckung von F eine vierfache von F' zur Folge hat. Kehren wir jetzt zu unserer quadratischen Transformation zurück, so hatten wir dort gesehen, wie sich die transformirten geraden Theta's durch: ϑ_5, ϑ_{34}, ϑ_2, ϑ_{01} ausdrücken lassen, und wir bemerken, dass jene Ausdrücke nach der Borchardt'schen Darstellung nichts anderes sind als die linken Seiten der Gleichungen der 10 Fundamentalflächen. Soll demnach ein Punkt auf einer der 10 Flächen 2. Grades liegen, so muss eine der geraden Theta-Functionen $\vartheta(v'_1 \mid v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})$ verschwinden, es müssen also die Parameter des Punktes in dem von mir gegebenen Sinne eine der geraden Thetafunctionen zu Null machen. Die Sache verhält sich des Näheren folgendermassen; der Durchschnitt der Fläche:

mit	123,456	wird	dargestellt	durch	$\vartheta'_{14}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	124,356	„	„	„	$\vartheta'_{03}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	125,346	„	„	„	$\vartheta'_{12}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	126,345	„	„	„	$\vartheta'_{0}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	134,256	„	„	„	$\vartheta'_{4}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	135,246	„	„	„	$\vartheta'_{5}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	136,245	„	„	„	$\vartheta'_{34}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	145,236	„	„	„	$\vartheta'_{2}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	146,235	„	„	„	$\vartheta'_{01}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$
„	156,234	„	„	„	$\vartheta'_{23}(v'_1 \mid v'_2) = 0,$

Auch diese Resultate stimmen genau mit den Darstellungen des zweiten Abschnittes überein. Setzt man nämlich eine der 15 Periodenhälften in die 16 Thetafunctionen als Parameter ein, so verschwinden immer 6 dieser Theta's, indem dieselben dann $= \vartheta\left(\int_{\alpha}^{k_i} dv'_1 \;\middle|\; \int_{\beta}^{k_i} dv'_2\right)$ werden, wo k_i irgend einer der Verzweigungspunkte ist. Für die Parameter $0 \mid 0$ verschwinden die 6 ungeraden Functionen, für die Parameter $\frac{P_1}{2} \;\middle|\; \frac{P_2}{2}$ verschwinden diejenigen 6 Theta's, welche sich als ungerade Theta's mit den Argumenten $0 \mid 0$ darstellen lassen; 6 solche Theta's haben als Charakteristik die Hälften solcher Periodencombinationen, wie sie 6 in einer Doppelebene liegenden Knotenpunkten zukommen; 2 unter ihnen sind ungerade, die 4 übrigen gerade. So befriedigen z. B. die Parameter der Durchstosspunkte des Directricenpaares (12) nach Theil II die ungeraden Funktionen: ϑ'_{24} und ϑ'_{3} und also noch die geraden Functionen: ϑ'_{14}, ϑ'_{12}, ϑ'_{0} und ϑ'_{03}, und in der That liegen diese Punkte auf den 4 Flächen 123; 124; 125; 126; wie es nach obigem Schema sein muss. Es wird angemessen

sein, auch auf die Bedeutung der geraden Theta's, im Falle sie nicht verschwinden, näher einzugehen, nachdem wir in Theil II bereits die Bedeutung der ungeraden Thetafunctionen erkannt haben. Nun ist aber, abgesehen von einem überall gleichmässig auftretenden Factor, die gerade Thetafunction multiplizirt mit ihrem Nullwerth gleich dem Werthe, welche die zugehörige F_2 annimmt, nachdem man in ihre Gleichung die Coordinaten des betreffenden Punktes eingesetzt hat; man wird desshalb diese Produkte als Abstände des Punktes von den zehn F_2, oder vielmehr als seine Coordinaten in Bezug auf diese Flächen auffassen können, analog der Abstandsbestimmung eines Punktes von einer Ebene. Wir können alsdann den Satz aussprechen: Ist eine Kummer'sche Fläche auf ein Fundamentaltetraëder bezogen und setzt man die Coordinaten ihrer Punkte gleich 4 Thetafunktionen die einer Göpel'schen Relation genügen, so erhält man durch quadratische Transformation dieselbe Fläche bezogen auf die 10 Flächen 2. Grades, und zwar sind dann die 10 geraden Theta's multiplicirt mit ihren Nullwerthen die Coordinaten in Bezug auf diese Flächen.

Zum Schluss noch folgende Bemerkung: Geht man von dieser genannten quadratischen Transformation zu einer anderen über, so heisst das nichts anderes als dass eine Permutation der Flächen 2. Grades und ein Uebergang von einem Fundamentaltetraëder zu einem anderen stattgefunden hat; so lange dieselben 4 geraden Theta's sich durch Quadrate darstellen lassen, so lange bleibt das Tetraëder erhalten.

		$\frac{\tau_{11}}{2}\,\Big|\,\frac{\tau_{12}}{2}$	$\frac{\tau_{12}}{2}\,\Big|\,\frac{\tau_{22}}{2}$	$\frac{\tau_{11}}{2}+\frac{\tau_{12}}{2}\,\Big|\,\frac{\tau_{12}}{2}+\frac{\tau_{22}}{2}$	$\frac{1}{2}\,\Big|\,0$	$0\,\Big|\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{2}$	$\tau_{11}\,|\,\tau_{12}$	$\tau_{12}\,|\,\tau_{22}$	$1\,|\,0$	$0\,|\,1$
		$e^{-\pi i(v_1+\frac{\tau_{11}}{4})}$	$e^{-\pi i(v_2+\frac{\tau_{22}}{4})}$	$e^{-\pi i(v_1+v_2+\frac{\tau_{11}+\tau_{22}}{4})}$				$e^{-\pi i(2v_1+\tau_{11})}$	$e^{-\pi i(2v_2+\tau_{22})}$		
ϑ_5	$\vartheta\binom{00}{00}$	ϑ_{01}	ϑ_4	ϑ_{23}	ϑ_{12}	ϑ_{34}	ϑ_0	+	+	+	+
ϑ_{12}	$\vartheta\binom{00}{10}$	$i\vartheta_{02}$	ϑ_{03}	$i\vartheta_{13}$	ϑ_5	ϑ_0	ϑ_{34}	−	+	+	+
ϑ_{34}	$\vartheta\binom{00}{01}$	ϑ_2	$i\vartheta_3$	$i\vartheta_{24}$	ϑ_0	ϑ_5	ϑ_{12}	+	−	+	+
ϑ_0	$\vartheta\binom{00}{11}$	$i\vartheta_1$	$i\vartheta_{04}$	$-\vartheta_{14}$	ϑ_{34}	ϑ_{12}	ϑ_5	−	−	+	+
ϑ_{01}	$\vartheta\binom{10}{00}$	ϑ_5	ϑ_{23}	ϑ_{01}	$-\vartheta_{02}$	ϑ_2	$-\vartheta_1$	+	+	−	+
ϑ_{02}	$\frac{1}{i}\vartheta\binom{10}{10}$	$i\vartheta_{12}$	ϑ_{13}	$i\vartheta_{02}$	ϑ_{01}	ϑ_1	ϑ_2	−	+	−	+
ϑ_2	$\vartheta\binom{10}{01}$	ϑ_{34}	$i\vartheta_{24}$	$i\vartheta_2$	$-\vartheta_1$	ϑ_{01}	$-\vartheta_{02}$	+	−	−	+
ϑ_1	$\frac{1}{i}\vartheta\binom{10}{11}$	$i\vartheta_0$	$i\vartheta_{14}$	$-\vartheta_1$	ϑ_2	ϑ_{02}	ϑ_{01}	−	−	−	+
ϑ_4	$\vartheta\binom{01}{00}$	ϑ_{23}	ϑ_5	ϑ_4	ϑ_{03}	$-\vartheta_3$	$-\vartheta_{04}$	+	+	+	−
ϑ_{03}	$\vartheta\binom{01}{10}$	$i\vartheta_{13}$	ϑ_{12}	$i\vartheta_{03}$	ϑ_4	$-\vartheta_{04}$	$-\vartheta_3$	−	+	+	−
ϑ_3	$\frac{1}{i}\vartheta\binom{01}{01}$	ϑ_{24}	$i\vartheta_{34}$	$i\vartheta_3$	ϑ_{04}	ϑ_4	ϑ_{03}	+	−	+	−
ϑ_{04}	$\frac{1}{i}\vartheta\binom{01}{11}$	$i\vartheta_{14}$	$i\vartheta_0$	$-\vartheta_{04}$	ϑ_3	ϑ_{03}	ϑ_4	−	−	+	−
ϑ_{23}	$\vartheta\binom{11}{00}$	ϑ_4	ϑ_{01}	ϑ_5	$-\vartheta_{13}$	$-\vartheta_{04}$	ϑ_{14}	+	+	−	−
ϑ_{13}	$\frac{1}{i}\vartheta\binom{11}{10}$	$i\vartheta_{03}$	ϑ_{02}	$i\vartheta_{12}$	ϑ_{23}	$-\vartheta_{14}$	$-\vartheta_{24}$	−	+	−	−
ϑ_{24}	$\frac{1}{i}\vartheta\binom{11}{01}$	ϑ_3	$i\vartheta_2$	$i\vartheta_{34}$	$-\vartheta_{14}$	ϑ_{23}	$-\vartheta_{13}$	+	−	−	−
ϑ_{14}	$-\vartheta\binom{11}{11}$	$i\vartheta_{04}$	$i\vartheta_1$	$-\vartheta_0$	ϑ_{24}	ϑ_{13}	ϑ_{23}	-	−	−	−